ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 2 JUIN 1930.

PRÉSIDENCE DE M. Léon LECORNU.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

M. le **Président** annonce à l'Académie qu'à l'occasion des fêtes de la Pentecôte la prochaine séance hebdomadaire aura lieu le mercredi 11 au lieu du lundi 9 juin.

M. le **Président** souhaite la bienvenue à M. **Henri Gautier**, directeur honoraire de l'Observatoire de Genève, qui assiste à la séance.

ÉLASTICITÉ. — *Sur la détermination optique des tensions intérieures dans les solides à trois dimensions.* Note de M. **Mesnager**.

Dans le *Compte rendu* du 20 mai 1930 a paru une Note de M. Henry Favre présentant l'ébauche d'une méthode optique pour la résolution expérimentale d'un problème d'élasticité quelconque. Cette méthode très intéressante présente malheureusement d'assez grandes difficultés pratiques; de plus elle a l'inconvénient de ne donner de solutions que pour le verre de Pockels, et dans l'élasticité à trois dimensions, les résultats changent avec les coefficients d'élasticité.

Notamment, j'ai signalé (*Comptes rendus*, 168, p. 156) les simplifications qui se produisent dans les formules d'élasticité à trois dimensions quand le coefficient de Poisson est égal à 0,5 (Alliage de platine et d'argent. *Recueil de constantes physiques*, par Abraham et Sacerdote, Gauthier-Villars, p. 171). La distribution des tensions est alors, dans un certain nombre de problèmes, indépendante des coefficients d'élasticité, à trois dimensions comme à deux dimensions.

Pratiquement en général les tensions dangereuses se produisent à la surface. Il suffit donc le plus souvent de connaître les tensions dans la couche superficielle. Dans celle-ci la tension principale perpendiculaire à la surface est nulle, les deux autres sont parallèles à cette surface. S'il existe une surface réfléchissante à faible profondeur, il est facile d'étudier les deux tensions principales non nulles de cette couche. La couche superficielle argentée à sa face postérieure peut être collée sur la masse du corps.

Si l'on opère sur un corps à module d'Young élevé, transparent ou non, il suffit de déposer à la surface rendue réfléchissante une matière transparente adhérente à module d'Young faible. Cette matière ne modifiera pas sensiblement les tensions intérieures et par suite les déformations parallèles à la surface. Celles-ci entraîneront des déformations identiques dans la couche transparente, déformations qu'on pourra mesurer par sa double réfraction accidentelle.

On peut d'ailleurs avec une série de sections réfléchissantes, en opérant par soustraction, obtenir successivement l'effet de chaque couche.

La seule difficulté est de mesurer cette double réfraction sur une faible épaisseur.

Or M. H. L Tardy a indiqué dans la *Revue d'Optique* en 1929, pages 59 à 69, une méthode qui permet l'étude des biréfringences très faibles. Avec cette méthode on peut étudier la couche superficielle.

Il est facile notamment de résoudre les problèmes de plaques épaisses de contour quelconque posées ou encastrées. Il n'est pas même besoin alors de recourir à des épaisseurs très faibles.

SPECTROSCOPIE. — *Propriétés des séries et raies anormales dans les spectres atomiques.* Note de M. **H. Deslandres**.

L'étude des séries et raies anormales dans les spectres d'atomes et de molécules a une grande importance, signalée par tous les auteurs. Tous s'accordent à reconnaître que ces anomalies peuvent fournir des indications précieuses sur la loi de formation des raies spectrales.

J'ai déjà examiné à ce point de vue, de 1886 à 1913, les spectres de bandes ou spectres moléculaires. Dans la bande normale les raies se suivent régulièrement, les intervalles successifs croissant en progression arithmétique; mais parfois les intervalles s'écartent de cette loi simple et les intensités sont aussi modifiées. On a ce que j'ai appelé une perturbation;

et c'est le relevé des grandes perturbations, discernables avec un appareil peu dispersif, qui m'a conduit à la loi générale de distribution des bandes d'un même spectre.

Les spectres de raies ou spectres atomiques, dont les raies sont distribuées en séries suivant une loi différente, offrent aussi des anomalies similaires de position et d'intensité. Les séries de l'hydrogène sont représentées exactement par la formule de Balmer, $\nu = A - N/m^2$; mais, pour les autres éléments, la loi est moins simple. Plusieurs formules, dérivées de la précédente, ont été employées, comme on sait, pour représenter, dans la limite des erreurs d'observation, la fréquence des raies de série, en fonction des nombres entiers successifs, 1, 2, ..., m. Les principales sont : la formule de Rydberg (1889) $\nu = A - N/(m + \mu)^2$, dont les deux constantes A et μ sont à déterminer pour chaque série; la formule de Ritz (1903) $\nu = A - N/(m + \mu + \beta/m^2)^2$ et la formule de Hicks (1909) $\nu = A - N/(m + \mu + \alpha/m)^2$, l'une et l'autre avec trois constantes. On dresse la liste des écarts O — C ou des différences entre les fréquences observées et calculées. Lorsque, dans l'ensemble, les écarts sont très petits, la formule est jugée satisfaisante; mais parfois une raie de la série présente un écart plus grand, nettement supérieur à l'erreur d'observation; elle forme ainsi ce que j'appelle une pointe anormale, qui peut être accompagnée d'une variation d'intensité. Lorsqu'une série a plusieurs pointes anormales, elle est dite elle-même anormale.

Ces raies et séries anormales ont retenu récemment mon attention. J'ai annoncé que les raies ultimes ou maxima des spectres atomiques étaient, à de faibles différences près, pour plusieurs groupes de corps simples, des multiples de la fréquence élémentaire 1062,5, désignée par la lettre d_1. Même j'ai dû considérer aussi le sous-multiple de cette fréquence, d_1/n, n étant un nombre entier petit, et la différence entre les fréquences des raies fortes et les multiples de d_1/n étant au plus égale à $d_1/10n$. Ces raies ultimes sont les raies premières de séries hydrogénoïdes, mais d'autres raies de série, qui ne sont pas des raies premières, sont aussi des multiples de d_1; et j'ai recherché si elles ne correspondent pas aussi à des variations d'intensité.

Je me suis arrêté d'abord à la série diffuse de simplets de Mg, dont les raies numérotées (3) et (4) sont des multiples de d_1, à savoir $\lambda\,5528\,\nu\,17 d_1 - 21$ et $\lambda\,4703\,\nu\,20 d_1 - 7$. Cette série est présentée partout comme le type des séries anormales; jusqu'ici aucune formule n'a pu la bien représenter, et la formule de Johanson, qui s'en rapproche le plus, donne pour elle les diffé-

rences O — C suivantes, tirées du Mémoire important de Fowler (*Report on line spectra*, 1922, p. 37).

m.	2.	3.	4.	5.
O — C en ν	$\pm$ 0,00	+ 1,57	− 2,4	+ 0,58

Les différences révèlent deux belles pointes anormales qui correspondent justement aux deux multiples de d_1, et aussi d'ailleurs à des intensités anormales.

J'ai examiné alors les autres anomalies typiques déjà signalées, à savoir :

La deuxième raie de la série diffuse de K, λ 6966, notée comme anormalement faible ; sa fréquence $\nu = (13 + {}^1/_2)d_1 + 10$.

La deuxième raie de la série principale de simplets de Ca, λ 2722, aussi trop faible ; sa fréquence est $(34 + {}^1/_2)d_1 + 76$; la liaison avec $d_1/2$ est moins étroite qu'avec la raie précédente. A noter qu'elle est placée entre deux raies dont l'intervalle est un multiple de $d_1(17d_1 - 12)$; les probabilités d'émission peuvent en être modifiées.

La premiere raie du triplet fondamental (6) de Ca λ 3753, trop faible, fréquence $\nu = 25\,d_1 + 73$.

Dans Ba, la première raie du triplet fondamental (5), anormalement forte, λ 3421 $\nu = (27 + {}^1/_2)d_1 + a$.

Enfin, dans Na, le doublet n° 6 de la série principale, beaucoup plus étroit que le doublet n° 7 : λ 2544, ν 37 $d_1 - 13$.

Les anomalies fortes apparaissent bien liées à la fréquence d_1 ; mais en est-il de même avec les pointes anormales faibles et donc plus difficiles à discerner ? Inversement les raies multiples de d_1 sont-elles liées à des anomalies de position ou d'intensité, grandes ou petites ?

Pour répondre à ces questions, il faut s'appuyer sur des mesures précises. J'ai examiné à ce point de vue l'hélium et les corps alcalins dont l'atome est simple, et dont les spectres ont été relevés avec précision ; je donne aujourd'hui les résultats obtenus avec l'hélium, le lithium et le sodium.

Hélium. — Pour simplifier j'examinerai seulement deux séries de l'hélium, les autres séries donnant des résultats analogues.

Série fine de simplets : 11 raies dont trois multiples de d_1 : raie (2) λ 7281 ν 13 $d_1 - 82$; raie (3) λ 3936 ν 24 $d_1 - 100$; raie (12) λ 3771 ν 25 $d_1 - 19$. Or Ritz (1903) et Hicks (1910), puis Fowler (1922) avec des mesures plus précises, offrent des pointes avec les raies (7) et (12) ; la raie (2), choisie par eux pour déterminer les constantes de la formule, échappe à l'examen. La courbe de la figure 1, qui reproduit les O — C de Fowler, montre bien

COURBES DES O — C

ou des différences entre les fréquences observées et les fréquences calculées, pour les raies successives (1, 2, 3, ..., m) de la série.

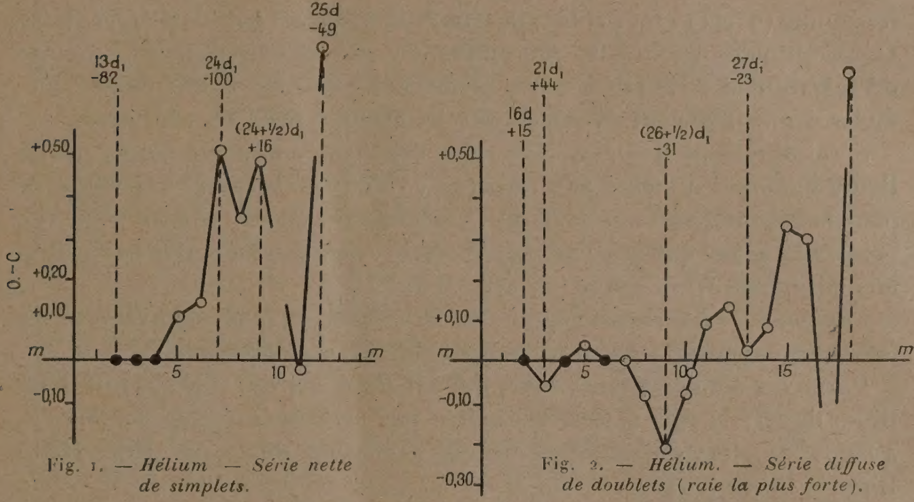


Fig. 1. — *Hélium* — *Série nette de simplets.*

Fig. 2. — *Hélium.* — *Série diffuse de doublets (raie la plus forte).*

Note. — Les points noirs annoncent les raies qui ont servi à l'établissement de la formule qui est du type Hicks.

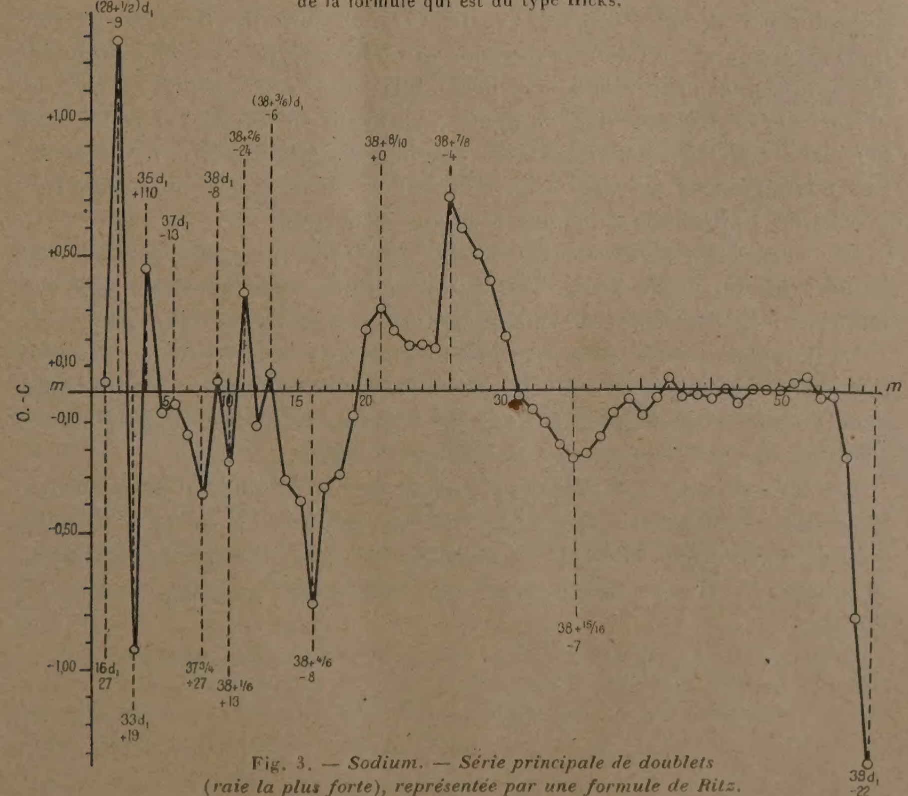


Fig. 3. — *Sodium.* — *Série principale de doublets (raie la plus forte), représentée par une formule de Ritz.*

les pointes (7) et (12) et en plus une pointe pour la raie (9) $\nu(24+{}^1/_2)d_1+16$. Or les formules des auteurs sont différentes, et leur accord pour les pointes est remarquable. En fait les divergences entre les O — C des diverses formules tiennent surtout au choix des raies utilisées pour les constantes.

Série diffuse de doublets : 17 raies avec trois multiples de d_1, que la figure 2 montre attachés aux raies (2), (3) et (13). La raie (2), employée pour la formule, est tenue à l'écart; mais les raies (3) et (13) ont de petites pointes. A noter que la pointe la plus forte correspond à la raie (9) qui est un multiple de $d_1/2$ $\nu = (26 + {}^1/_2)d_1 - 31$.

Lithium. — La série principale avec 41 raies est la plus importante; mais les sept premières raies sont les seules mesurées avec précision.

Parmi ces dernières raies, celles qui ont les numéros (1) et (5) sont multiples de d_1; la raie (1) est accaparée par la formule; mais la raie (5) $\lambda 2475$ $\nu 38d_1 + 12$ est relevée avec une pointe anormale par Ritz, Hicks Birge et Bevan (1916).

Sodium. — La série principale offre 57 raies mesurées avec une grande précision par Wood et Fortrat (1916). C'est la série la plus riche en raies que l'on connaisse, et, pour la question qui nous occupe, elle offre un intérêt de tout premier ordre. La courbe des différences O — C publiées par Wood et Fortrat est présentée dans la figure 3 ci-dessus, et elle met en relief d'une façon saisissante les liens étroits des pointes anormales avec la fréquence d_1. Les conséquences diverses à en tirer seront développées dans une Note prochaine. J'ajouterai seulement quelques remarques :

Les raies de la série rattachées à six multiples de d_1 ont chacune leur pointe plus ou moins forte. Les autres pointes, dont quelques-unes sont hautes, sont rattachées à des multiples de $d_1/2n$, n variant de 1 à 8.

La pointe anormale est particulièrement forte pour les dernières raies de l'hélium (simplets) et du sodium ; ces raies sont très voisines d'un multiple de d_1 compris entre elles et la limite de la série. La pointe de l'hélium est diminuée sur le dessin à cause du manque de place.

Les faits présentés ci-dessus annoncent que la fréquence des raies anormales est modifiée en même temps que leur intensité. Il convient d'étudier les radiations dont l'intensité est changée dans une atmosphère d'hélium et de vérifier si elles ne subissent pas aussi une petite variation de leur fréquence.

BIOLOGIE VÉGÉTALE. — *Sur l'hérédité du sexe chez l'Ancolie* (Aquilegia vulgaris *L.*). Note [1] de M. **L. Blaringhem.**

Les Traités de biologie florale ne signalent pas (H. Müller, F. Ludwig, J. Mac Leod, P. Knuth, etc.) d'individus femelles chez les espèces d'Ancolies et, en fait, ils sont rares dans la nature. En mai-juin 1923, j'en ai trouvé dans la proportion de 1 pour 100 parmi les *Aquilegia vulgaris* L. hermaphrodites de la vallée d'Ussat (Ariège), sur la route de Quérigut. Deux pieds femelles vigoureux, transportés en fleurs avec quelques pieds hermaphrodites à la Station de Recherches Berthelot à Bellevue (S.-et-O.), sont les points de départ de mes études de génétique sur les Ancolies et elles m'ont déjà fourni, à partir de divers croisements, une lignée (F_2) provenant d'une plante autofécondée en 1928 qui ne renferme que des pieds femelles (27 individus). C'est une preuve nouvelle de la rapidité avec laquelle s'épurent les lignées divergentes par la sexualité, phénomènes dont j'ai donné déjà plusieurs exemples chez les Caryophyllées [2].

1° Les fleurs isolées des plantes femelles d'Ussat ont été pollinisées artificiellement avec le pollen d'*Aquilegia vulgaris* hermaphrodites d'Ussat et de diverses races horticoles, dont une forme à fleurs blanches semi-pleines d'*Aquilegia sibirica* L. et une variation très uniforme d'*Aquilegia chrysantha* Asa Gray. Il en est résulté une série de formes intermédiaires où j'ai noté la fréquence des plantes à fleurs femelles, ou mixtes mais à étamines presque stériles; j'obtins d'ailleurs en 1925 et 1926, même dans les lignées horticoles, quelques plantes à fleurs strictement femelles; ce qui me porte à penser que la ségrégation rapide ne tient pas uniquement à une tendance propre de l'*Aquilegia vulgaris* d'Ussat. Pour des raisons théoriques, je m'efforçai de séparer des lignées à haut pourcentage de fleurs femelles, surtout dans les teintes pures bleues, blanches et mordorées; c'est pourquoi j'isolai dans les produits (F_2) de 1928 une cinquantaine de plantes dont plus de la moitié présentaient des fleurs à étamines petites et à staminodes; je fécondai à la main la plupart d'entre elles et obtins, dans trente cas envi-

---

(1) Séance du 26 mai 1930.

(2) L. Blaringhem, *Sur l'hérédité du sexe chez les hybrides d'Œillets et spécialement chez* Dianthus barbatus *L.* × D. caryophyllus *L.* (*Comptes rendus*, 185, 1927, p. 1208) et *Sur l'hérédité du sexe chez une lignée pyrénéenne de* Silene italica *Pers.* (*Bull. Soc. bot. France*, 74, 1927, p. 1000).

ron, des graines peu nombreuses mais bonnes. De ces isolements et cultures dérivent vingt descendances cultivées à Bellevue (F_2), dont un ancêtre au moins est l'*Aquilegia vulgaris* femelle de Quérigut.

Un seul lot, comme je l'ai dit, ne donna que des pieds femelles; un autre, 21 pieds femelles et trois pieds intermédiaires à fertilité des étamines réduites; cinq autres offrent des pourcentages divers mais faibles, oscillant entre un tiers et un dixième, de plantes femelles; les treize lignées restant ne renferment que des individus hermaphrodites dont toutes les étamines sont bien constituées avec pollen abondant. Bref, il s'est produit une ségrégation nette et malgré une sélection sévère en vue de l'obtention de lignées riches en plantes femelles, deux descendances seulement sur vingt donnent ce résultat. Tout se passe comme dans l'isolement des mutantes; l'hérédité du sexe, comme la mutation, n'est pas la règle mais l'exception, comme je l'ai établi déjà pour la Lychnide dioïque ([1]).

2° Cette ségrégation des sexes se produit régulièrement et avec une grande netteté dans les croisements d'espèces affines, ou variétés de la même espèce linnéenne *Aquilegia vulgaris* L.; se comportent comme telles, dans mes croisements, les combinaisons d'*Aquilegia vulgaris* d'Ussat, d'*Aquilegia vulgaris* L. cultivées, à fleurs blanches ou roses, et les variations semi-doubles avec ou sans éperons d'*Aquilegia sibirica* L. Dans les croisements où intervient *Aquilegia chrysantha* Asa Gray, le phénomène se complique par des stérilités partielles et superposées. Je ne puis que signaler ici l'allure générale du phénomène qui est le mode d'hérédité unilatérale matrocline, déjà noté pour des croisements entre plantes hermaphrodites de ces espèces divergentes d'Ancolies par M. Paul Vuillemin ([2]) et récemment par M[lle] Marie Skalinska ([3]) avec une série d'irrégularités et d'anomalies que l'on rencontre aussi dans les hybrides entre espèces divergentes de Fraisiers et de Benoites. J'y reviendrai plus tard.

3° Quelle que soit la lignée, à l'état sauvage ou cultivé, pure ou métisse ou hybride, *les fleurs des plantes femelles d'*Aquilegia *sont nettement plus petites que les fleurs correspondantes hermaphrodites.* Par exemple, pour la

---

([1]) L. Blaringhem, *Sur l'hérédité du sexe chez la Lychnide dioïque* (Lychmis vespertina *Sibthorp*) (*Comptes rendus*, 174, 1922, p. 1429).

([2]) P. Vuillemin, *Disjonction et combinaison des caractères des parents dans une hybride* (*Comptes rendus*, 175, 1922, p. 353).

([3]) M. Skalinska, *Sur les causes d'une disjonction non typique des hybrides entre différentes espèces du genre* Aquilegia (*C. R. Soc. Biol.*, 96, 1927, p. 1485).

combinaison

Aquilegia vulgaris ♀ (Ussat) × *A. vulgaris* ☿ (Ussat),

les dimensions des pièces des premières fleurs sont, pour deux plantes élevées côte à côte et de même âge :

	Fleur.	Longueur totale.	Largeur maxima.
		mm	mm
Pétale à éperon	☿....................	33	14
	♀....................	17	8
Pétale lancéolé	☿....................	35	13
	♀....................	18	7
Filet d'étamine	☿....................	18	(avec 55 étamines)
Filet de staminode	♀....................	11	(avec 48 staminodes)

Pour la combinaison

Aquilegia vulgaris ♀ × *A. chrysantha* Asa Gray,

on trouve régulièrement, en plus des plantes à fleurs nettement toutes hermaphrodites ou nettement toutes femelles à staminodes, des individus dont les étamines sont seulement avortées en partie, les dernières développées dans la fleur renfermant du pollen bien conformé.

Or ici on peut noter une sorte de parallélisme entre le développement des pétales et le développement parfait, incomplet ou nul des anthères.

	Fleur.	Longueur totale.	Largeur maxima.
		mm	mm
Pétale à éperon.	☿...........	33	15
	intermédiaire.......	27	8
	♀...........	18	6
Pétale lancéolé.	☿...........	30	16
	intermédiaire......	29	9
	♀...........	19	8

Ainsi le dimorphisme sexuel est bien marqué, comme chez la plupart des Caryophyllées ([1]), et l'on peut utiliser cette remarque pour le dénombrement des individus des deux sexes lorsqu'il s'agit de populations à l'état sauvage.

En résumé, par des isolements heureux, on peut obtenir en quelques générations des lots de plantes femelles à partir de populations très pauvres; ces

---

([1]) L. Blaringhem, *Sur le dimorphisme sexuel des fleurs et la variabilité spécifique* (*Bull. Soc. Bot., France*, 71, 1924, p. 265; 2 planches).

réussites sont exceptionnelles mais traduisent bien le mode d'hérédité du sexe qui est celui des mutantes (*Œnothera lata*, *Spinacia oleracea*, *Zea Mays*, *Dianthus*, *Silene*, *Lychnis*, ...). L'obtention de lignées femelles est précieuse pour l'étude génétique des races horticoles : en l'état actuel de nos connaissances, il n'y a pas de meilleur procédé, pour analyser méthodiquement les singularités horticoles et les phénomènes tératologiques, que de faire l'épreuve des pollens sur des lignées femelles bien connues. La méthode consiste à utiliser dans les réactions génétiques, au même titre que les réactifs de laboratoire en chimie, des pédigrées de plantes qui n'ont en activité qu'un sexe, femelle ou mâle, par une sorte de désagrégation de l'espèce en types plus simples et plus uniformes. C'est pourquoi je m'efforce d'obtenir des lignées femelles héréditaires dans le plus grand nombre possible d'espèces.

ÉLECTIONS.

L'Académie procède par la voie du scrutin à l'élection d'un membre de la section d'Économie rurale en remplacement de M. *L. Lindet* décédé.

Au premier tour de scrutin, le nombre de votants étant 55,

M. Louis Lapicque	obtient	....	17 suffrages
M. Pierre Mazé	»	....	10 »
M. Gustave Moussu	»	....	8 »
M. Émile Schribaux	»	....	6 »
M. Richard Fosse	»	....	4 »
M. Abel Gruvel	»	....	4 »
M. Henri Vallée	»	....	4 »
M. Maurice Javillier	»	....	2 »

Au second tour de scrutin, le nombre de votants étant 55,

M. Louis Lapicque	obtient	....	19 suffrages
M. Pierre Mazé	»	....	12 »
M. Gustave Moussu	»	....	12 »
M. Richard Fosse	»	....	5 »
M. Henri Vallée	»	....	3 »
M. Émile Schribaux	»	....	2 »
M. Émile Demoussy	»	....	1 »
M. Abel Gruvel	»	....	1 »

Au troisième tour de scrutin, le nombre de votants étant 55,

M. Louis Lapicque	obtient	....	23 suffrages
M. Gustave Moussu	»	....	15 »
M. Pierre Mazé	»	....	11 »
M. Richard Fosse	»	....	5 »
M. Henri Vallée	»	....	1 »

Au scrutin de ballottage entre les candidats, pour lesquels il n'y a pas deux autres candidats ayant eu un plus grand nombre de suffrages, le nombre de votants étant 54,

M. Louis Lapicque	obtient	....	31 suffrages
M. Gustave Moussu	»	....	22 »

Il y a 1 bulletin nul.

M. **Louis Lapicque**, ayant réuni la majorité absolue des suffrages, est proclamé élu.

Son élection sera soumise à l'approbation de M. le Président de la République.

CORRESPONDANCE.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur quelques majorantes harmoniques.* Note de M. **Gaston Julia.**

1. M. Carleman a établi (page 4 de son livre sur les *Fonctions quasi-analytiques*) le théorème suivant : « Une fonction $f(z)$ étant holomorphe dans un secteur D limité : 1° par deux segments de droite AO, OB faisant en O l'angle $\alpha\pi (\alpha > 0)$; 2° par un arc de courbe de Jordan ACB unissant A et B; si, au voisinage de tout point des segments-frontière AOB on a $|f(z)| < M + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ arbitrairement petit), et au voisinage de tout point de ACB on a $|f(z)| < m + \varepsilon$, avec la condition $m < M$, on a, *en tout point* ζ *de la bissectrice du secteur* D, l'inégalité $|f(\zeta)| < m^{\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{\alpha}}} M^{1-\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}$, r désignant la distance $O\zeta$, et R le *maximum* de la distance à O d'un point de l'arc ACB. »

Voici quelques remarques qui conduisent : d'abord à une majorante simple de $f(z)$ *valable dans tout le secteur* et coïncidant avec celle de M. Carleman sur la bissectrice; puis à une majorante valable pour le

cas $m > M$. Les majorantes obtenues, écrites de manière à séparer les rôles du point z, du domaine total, et du rapport $m : M$ peuvent s'étendre à des domaines très généraux, moyennant des hypothèses très larges sur leurs frontières, comme nous l'établirons ultérieurement. On est ainsi conduit, notamment, à étendre ce théorème des deux constantes qu'ont signalé et souvent appliqué, indépendamment de M. Carleman, MM. Nevanlinna et Ostrowski. Nous nous bornerons ici au cas du secteur D, défini comme on vient de le faire ci-dessus.

2. *Sous les hypothèses de M. Carleman*, on transforme d'abord par $u = (z : \zeta)^{\frac{1}{\alpha}}$ le secteur D en un domaine D_1 du plan u situé à droite de l'axe imaginaire $A_1O_1B_1$, et limité à droite de cet axe par l'arc de Jordan $A_1C_1B_1$ dont la *distance maxima* à O_1 est $P_1 = (R : r)^{\frac{1}{\alpha}}$. La fonction $\log|f[z(u)]|$, harmonique dans D_1, est majorée par la fonction harmonique régulière φ égale à $\log M$ sur $A_1O_1B_1$, à $\log m$ sur $A_1C_1B_1$; *à cause de* $m < M$, φ est majorée par φ_1 fonction harmonique régulière égale à $\log M$ sur l'axe imaginaire, à $\log m$ sur le demi-cercle de centre O_1 de rayon P_1; φ_1 est majorée par φ_2, harmonique régulière, égale à $\log M$ sur l'axe imaginaire, à $\log m$ sur la parallèle à cet axe, tangente au demi-cercle précédent. Or

$$\varphi_2 = \log M + \left[\log\left(\frac{m}{M}\right)\right]\frac{R(u)}{P_1},$$

et, en revenant à z, on trouve dans D

$$(1) \qquad \log\left|\frac{f(z)}{M}\right| < \left[\log\left(\frac{m}{M}\right)\right]\cos\frac{\omega}{\alpha}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

où $\rho = \overline{Oz} = |z|$ et ω désigne l'angle de la bissectrice $O\zeta$ de D avec le vecteur Oz. Pour $\omega = 0$, $\rho = r$, cela donne la formule de M. Carleman.

La majorante φ_1 (semi-circulaire) donnerait

$$(2) \qquad \log\left|\frac{f(z)}{M}\right| \leq \frac{2}{\pi}\left[\log\left(\frac{m}{M}\right)\right]\left\{\text{Arc sin}\frac{2\cos\frac{\omega}{\alpha}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}{\sqrt{\left[1+\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\right]^2 - 4\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\sin^2\frac{\omega}{\alpha}}}\right\}$$

plus précise, mais moins maniable que (1).

Lorsque z reste intérieur à un secteur D′, de même bissectrice et sommet que D, limité par le même arc de Jordan ACB et par deux rayons OA′ et

OB′ intérieurs à D, faisant respectivement avec OA et OB l'angle η, (1) donne (1′) $\log\left|\frac{f(z)}{M}\right| < \left[\log\left(\frac{m}{M}\right)\right]\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\sin\frac{\eta}{\alpha}$ qui, à un facteur *constant* près, a la forme de la majorante de M. Carleman.

D'une manière plus générale, soient d la distance de z au côté de l'angle AOB le plus voisin, et a le maximum de $(\sin\alpha\theta : \sin\theta)$ lorsque θ varie de o à $\frac{\pi}{\eta}$, on tire de (1)

$$(3)\qquad \log\left|\frac{f(z)}{M}\right| < d\rho^{\frac{1}{\alpha}-1}\left[\frac{1}{aR^{\frac{1}{\alpha}}}\log\left(\frac{m}{M}\right)\right].$$

La majorante à droite *valable dans tout* D, *sépare l'élément* $d\rho^{\frac{1}{\alpha}-1}$ *qui dépend du point* z, *de l'élément entre crochets qui ne dépend que du domaine total* D *et du rapport* $(m : M)$: sous cette forme, nous l'étendrons ultérieurement à un *domaine limité par des courbes quelconques d'une nature très générale*.

3. Les majorantes précédentes ne valent plus *lorsque* $m > M$. On considère alors le *minimum* P_2 de la distance à O_1 de l'arc de Jordan $A_1C_1B_1$; $P_2 = (R_0 : r)^{\frac{1}{\alpha}}$, R_0 *étant le minimum de la distance à* O *de l'arc* ACB *frontière de* D. La fonction harmonique ψ_1 égale à $\log M$ sur l'axe imaginaire, à $\log m$ sur le demi-cercle de centre O, de rayon P_2, majore $\log|f[z(u)]|$ dans le domaine semi-circulaire D'_1 intérieur à D_1 ainsi déterminé ; en dehors de D'_1 la majorante la plus simple est $\log m$. ψ_1 se calcule aisément comme (2) et donne, *dans la partie* D′ *de* D *intérieure au cercle de rayon* R_0, la majorante

$$(4)\qquad \log\left|\frac{f(z)}{M}\right| < \frac{2}{\pi}\left[\log\left(\frac{m}{M}\right)\right]\left\{\text{Arc sin}\frac{2\cos\frac{\omega}{\alpha}\left(\frac{\rho}{R_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}{\sqrt{\left[1+\left(\frac{\rho}{R_0}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\right]^2-4\left(\frac{\rho}{R_0}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\sin^2\frac{\omega}{\alpha}}}\right\}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\log\left(\frac{m}{M}\right)\right]\left\{\text{Arc tang}\frac{2\cos\frac{\omega}{\alpha}\left(\frac{\rho}{R_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}{1-\left(\frac{\rho}{R_0}\right)^{\frac{2}{\alpha}}}\right\}$$

qu'on peut, de diverses manières, majorer par des expressions plus simples.

Sur la bissectrice, $\omega = 0$ et (4) se simplifie en donnant par exemple

$$(5) \qquad \log\left|\frac{f(\zeta)}{M}\right| < \frac{1}{\pi}\left[\log\left(\frac{m}{M}\right)\right] \operatorname{Arc\,tang}\left(\frac{\rho}{R_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

La majorante (4) est trop forte lorsque z, de D, est extérieur à D′, on la remplace alors avec avantage par $|f(z)| < m$.

On peut ici encore, pour des domaines Δ intérieurs à D, mais *dont la fonction contient* O sans contenir les segments OA et OB, former à partir des précédentes, des majorantes très maniables dont le détail sera donné dans un Mémoire ultérieur.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Pôles, singularités essentielles.* Note de M. **Georges Bouligand.**

Il importe d'étudier les notions : *pôle*, *point singulier essentiel*, hors de tout champ fonctionnel spécial. Voici un cas déjà large où elles se rencontrent. Soit $\{Y_\nu(p)\}$ un système orthogonal normal, en intégrant sur un continu borné R de métrique riemannienne. Un Y_ν est une combinaison linéaire finie de fonctions ($2\nu + 1$ pour les Y_ν sphériques) avec coefficients respectant la normalité. Soit la classe linéaire des fonctions

$$\varphi_u(p) = [c_0 f_0(u) + d_0 g_0(u)] Y_0(p) + \ldots + [c_\nu f_\nu(u) + d_\nu g_\nu(u)] Y_\nu(p) + \ldots$$

dépendant du point p et de u, ou d'un point P d'un continu à une dimension de plus ; u tendant par exemple vers $+\infty$, on suppose les f_ν également bornées, les $|g_\nu|$ et les $|g_{\nu+1} : g_\nu|$ infiniment grandes. S'il n'y a qu'un nombre fini de $d_\nu \neq 0$, $\varphi_u(p)$ est dit présenter un *pôle* pour $u = +\infty$, ou sinon, un point singulier essentiel. Soit μ_u le module maximum de $\varphi_u(p)$ sur R.

(A). *Pour avoir un pôle, il faut et il suffit que les fonctions* $\mu_u^{-1}\varphi_u(p)$ *soient également continues* ($=$ E. C).

Dans le cas d'un pôle, $\varphi_u(p)$ équivaut à $d_n g_n(u) Y_n(p)$, où n est l'indice maximum des d_ν non nuls, la condition est donc nécessaire. Elle suffit : soit I_u l'intégrale de $\varphi_u^2(p)$ dans R, ou la somme des $(c_\nu f_\nu + d_\nu g_\nu)^2$. L'E. C. des $\mu_u^{-1}\varphi_u$ exclut toute suite $\{u_i\}$ tendant vers $+\infty$ et faisant tendre $\mu_u^{-2} I_u$ vers zéro (les $\mu_u^{-2}\varphi_u^2$, qui atteignent 1 en un p_i au moins, pour chaque u_i, ne pouvant être E. C. si leur moyenne sur R tend vers zéro). Donc, l'ensemble (fermé) des valeurs limites des $\mu_u^{-2} I_u$ a sa borne inférieure positive, d'où l'E. C. des $\varphi_u I_u^{-\frac{1}{2}}$: alors, il y a une suite $\{u_i\}$ tendant vers $+\infty$, telle que

les $\varphi_{u_i} I_{u_i}^{-\frac{1}{2}}$ tendent uniformément, sur R, vers une fonction continue $\varphi(p)$, dont le carré donne 1 pour intégrale. S'il y a une infinité de d_ν, chaque coefficient du développement de $\varphi_{u_i} I_{u_i}^{-\frac{1}{2}}$ tend vers zéro; donc le développement de $\varphi(p)$ donne zéro pour intégrale de son carré, contrairement à ce qui précède. C. Q. F. D.

(B). *Si* $Y_0(p)$, *supposée unique, a un minimum* $\beta > 0$, *il faut et il suffit, pour avoir un pôle, que les valeurs d'un signe donné, acquises par* $\varphi_u(p)$, *admettent une limitation* $K\,|g_n(u)|$ *où l'entier n est* $\geqq 1$.

Évidemment nécessaire, la condition suffit, car dans l'intégrale de $Y_0\varphi_u$, réduite à $c_0 f_0 + d_0 g_0$, la contribution des éléments d'un signe doit admettre une limitation en $|g_n|$, extensible à l'intégrale de φ_u (vu l'existence de β) et par suite, à tous les coefficients de son développement.

En particulier, si φ_u *demeure* > 0, les hypothèses du second énoncé entraînent $d_\nu = 0$ pour $\nu \geqq 1$. C'est le *principe des singularités positives de Picard* [l'hypothèse $\varphi_u > 0$ implique pour $g(u)$ un signe constant].

Applications. — Considérons, dans l'espace euclidien à trois dimensions, l'équation $\Delta U = \psi(r) U$ où $r = OP = e^{-u}$ (1). Soit p la trace de la demi-droite OP sur la sphère unitaire R de centre O. En posant $U\sqrt{r} = \varphi_u(p)$, appelant Γ la fonction de Green de $4\Delta_2\varphi - \varphi = 0$ pour la totalité de R, nous aurons l'équation

$$2\pi\varphi_u(p) = \int_R [\varphi''_{u^2}(m) - e^{-2u}\psi(e^{-u})\,\varphi_u(m)]\,\Gamma(m, p)\,d\sigma_m$$

dont toute solution est une somme, finie ou non, de fonctions $Y_\nu(p)\,v_\nu(u)$, avec

$$v''_\nu - [(\nu + 0,5)^2 + e^{-2u}\psi(e^{-u})]\,v_\nu = 0.$$

Lorsque r tend vers zéro, si $r^2\psi(r)$ a une limite λ, les coefficients $v_\nu = c_\nu f_\nu + d_\nu g_\nu$ vérifient les conditions du début à partir d'un certain rang : (A) s'applique. Pour $\lambda > -\frac{1}{4}$, on a (B) et le principe de Picard. On étudie de même à l'infini ($u \to -\infty$) les solutions régulières hors d'une sphère. Pour ψ constant, les $|g_{\nu+1} : g_\nu|$ ne tendent plus vers $+\infty$; cette fusion de croissances supprime la distinction des pôles.

(1) Dans sa Note sur l'équation plus générale $\Delta u = cu$ (*Comptes rendus*, 190, 1930, p. 287, n° 3), M. Brelot étudie un problème voisin, l'infiniment petit se substituant à l'infiniment grand.

(A) s'applique aux solutions de $\Delta u = R(x, y)U$ dans un cylindre indéfini parallèle à Oz, régulières pour $z > 0$, et soumises sur le cylindre à $U\alpha(s) + \frac{dU}{dn}\beta(s) = 0$, s étant l'arc de la section droite.

(B) et le principe de Picard valent pour des cas où Y_0 est ≥ 0; exemple : étude, au voisinage du sommet d'un cône, de fonctions harmoniques dans ce cône, nulles sur sa surface (cela parce que Y_ν reste avec Y_0, dans un rapport borné). Le problème analogue pour des surfaces à point conique révèle l'objectivité de la notion de pôle dans des conditions encore plus larges, notre égalité du début étant remplacée par une équivalence d'infiniment grands.

Les considérations précédentes systématisent les théorèmes généraux sur les singularités de ma Note du Tome 181 de ces *Comptes rendus*, 1925, page 705, et développés aux nos 24 à 28 du fascicule XI du *Mémorial Villat*.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur un problème mixte.*
Note [1] de M. **Victor Vâlcovici**, transmise par M. Appell.

Soient $z_1, z'_1, z_2, z'_2, \ldots, z_p, z'_p$ les points qui divisent le cercle $|z| = 1$ parcouru dans le sens positif, en $2p$ arcs ω_n et $\omega'_n (n = 1, 2, \ldots, p)$. Trouver une fonction $w(z) = u(xy) + iv(xy)$, holomorphe à l'intérieur du cercle, dont la partie réelle soit donnée (U_n) sur les arcs ω_n et la partie imaginaire (V_n) sur les arcs ω'_n. Les conditions qualitatives que U_n et V_n doivent remplir résultent de ce qui suit.

M. Volterra [2] a démontré que cette fonction est uniquement déterminée (si elle existe) dans l'hypothèse qu'elle reste finie et continue sur le contour du cercle, excepté un nombre fini de points où elle peut devenir infinie d'un ordre $< \frac{1}{2}$. Schwarz [3] a attiré l'attention sur ce que le problème n'est pas toujours possible. Dans une Note communiquée à l'Académie roumaine [4] j'ai indiqué le chemin à suivre pour trouver la solution ainsi que les conditions que devraient remplir les fonctions U_n et V_n pour que $w(z)$ existe.

---

(1) Séance du 12 mai 1930.

(2) V. Volterra, *Sopra alcune condizioni caratteristiche...* (*Annali di Matematica*, 2e série, 11, 1882, p. 1-55).

(3) *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, 15,) 1884, p. 361-365.

(4) V. Vâlcovici, *Sur un problème mixte de Dirichlet* (*Bulletin de la Section scientifique de l'Académie roumaine*, 4, iv, séance du 23 octobre 1915, p. 161).

Ensuite M. Signorini [1], en suivant une autre voie, a trouvé une formule donnant la fonction cherchée et a établi les conditions dont il est question plus haut.

Dans ce qui suit je me propose de trouver toutes les solutions $w(z)$ du problème, $w(z)$ pouvant devenir infini (dans un nombre fini de points) d'un ordre < 1. La différence $\Phi(z)$ de deux solutions $w(z)$ sera une fonction : *a*) holomorphe à l'intérieur et sur le contour de cercle $|z| = 1$ à l'exception d'un nombre fini de points singuliers; *b*) dans ces points elle peut devenir infinie d'ordre < 1; *c*) la partie réelle $R[\Phi(z)]$ de $\Phi(z)$ sera nulle sur les arcs ω_n et sa partie imaginaire $I[\Phi(z)]$ sera également nulle sur les arcs ω'_n.

Si $\Phi(z)$ n'a pas de zéro à l'intérieur du cercle, alors $\log\Phi(z)$ y sera aussi holomorphe ayant sa partie imaginaire égale à $\left(k_n + \frac{1}{2}\right)\pi$ sur ω_n et à $k'_n\pi$, sur ω'_n, k_n et k'_n étant des nombres entiers arbitraires qui peuvent prendre diverses valeurs même à l'intérieur des arcs ω_n, ω'_n. Soit α_n le nombre des points situés sur l'arc ω_n qui marquent le changement de la valeur de k_n. Soit également α'_n le nombre analogue correspondant à l'arc ω'_n. Si l'on désigne maintenant par z_λ $(\lambda = 1, 2, \ldots, s)$ tous les points marqués du cercle (z_n, z'_n et les points de subdivision), on trouve que la solution la plus générale $\Phi(z)$ est de la forme

$$P(z) = Ce^{Ai}\sqrt{\left(\frac{z'_1 - z}{z_1 - z}\right)\left(\frac{z'_2 - z}{z_2 - z}\right)\cdots\left(\frac{z'_p - z}{z_p - z}\right)}\prod_{\lambda=1}^{s}(z_\lambda - z)^{k_\lambda}, \quad s = 2p + \sum_{n=1}^{p}(\alpha_n + \alpha'_n).$$

$$A = -\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{p}\omega_n - \frac{1}{2}\sum_{\lambda=1}^{s}k_\lambda\varphi_\lambda, \qquad (\varphi_\lambda = \arg z_\lambda), \qquad \sum_{\lambda=1}^{s}k_\lambda = 0.$$

Au lieu de la condition *b*) nous avons admis toutes les fonctions qui dans un nombre fini de point z_λ du contour peuvent devenir infinies tout au plus comme $e^{\frac{1}{(z - z_\lambda)^\mu}}$ $(0 < \mu < 1)$. Les fonctions $\Phi(z)$ remplissant la condition *b*) se trouveront donc parmi les fonctions $P(z)$. Si par exemple les nombres entiers k_λ sont tous nuls, $P(z)$ satisfera la condition *b*).

Soient $s_l = e^{i\varphi_l}$ les zéros de $\Phi(z)$ de l'ordre m_l de multiplicité $(l = 1,$

---

[1] A. Signorini, *Sopra un problema al contorno...* (*Annali di Matematica*, 3e série, **25**, 1916, p. 253-273) et *Sur un problème mixte* (*Comptes rendus*, **190**, 1930, p. 712).

2, ..., q) situés à l'intérieur du cercle $|z| = 1$. Alors $\Phi(z)$ sera de la forme

$$Q(z) = P(z) \prod_{l=1}^{q} \left[\frac{(z - s_l)(z - s'_l)}{(z - e^{i\varphi_l})} \right]^{m_l}, \qquad s'_l = \frac{1}{r_l} e^{i\varphi_l}.$$

$Q(z)$ contient $P(z)$ comme cas particulier.

En revenant maintenant au problème mixte posé au début de cette Note on peut dire que $w_0(z)$ étant une solution du problème, la formule

$$w(z) = w_0(z) + \Phi(z)$$

contient toutes les solutions du problème pouvant devenir infinies sur le contour au plus comme $e^{\frac{1}{|z - z'|^{\mu}}}$ $(0 < \mu < 1)$; $\Phi(z)$ signifie une fonction de la forme $Q(z)$.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Inégalités entre des moyennes arithmétiques.* Note de M. T. **Bonnesen**, présentée par M. Émile Borel.

On m'a fait remarquer que les inégalités que j'ai démontrées dans une Note récente (1) ne sont pas nouvelles. En effet elles sont contenues dans la règle de Newton qui dit que le nombre des racines imaginaires de l'équation à coefficients réels

$$x^n - \binom{n}{1} A_1 x^{n-1} + \ldots + (-1)^p \binom{n}{p} A_p x^{n-p} + \ldots + (-1)^n A_n = 0$$

est au moins égal au nombre des variations de signe dans la suite

$$+, \quad A_1^2 - A_2, \quad \ldots, \quad A_p^2 - A_{p-1} A_{p+1}, \quad \ldots, \quad A_{n-1}^2 - A_{n-2} A_n, \quad +.$$

Tandis que Newton n'en a pas donné de démonstration, Mac Laurin en a donné plusieurs (*Philosophical Transaction*, 1726 et 1729; réimprimées dans l'édition de 1733 de l'*Arithm. Univers.* de Newton) entre lesquelles on trouve la même démonstration que j'ai donnée. Les inégalités ont aussi été démontrées par Sylvester, par Schlömilch (*Zeitschr. f. Math. u. Phys.*, 1858) et par MM. Polya et Szegö (*Aufgaben und Lehrsätze*, 1925, II, Aufz. 60-61, p. 46-47, 232).

---

(1) *Comptes rendus*, **190**, 1930, p. 714.

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Sur les fonctions du type* ($\mathfrak{A}$).
Note de M. **Léonidas Kantorovitch**, présentée par M. Émile Borel.

MM. Lusin et Suslin avaient introduit les ensembles A et leurs complémentaires CA ; à partir de ceux-ci M. Lusin avait construit une échelle des classes P_n, C_n des ensembles projectifs. Nous allons étudier des fonctions liées avec ces ensembles de la même manière que les fonctions de M. Baire avec les ensembles de M. Borel.

Nous dirons qu'une fonction $\mathcal{F}(x)$ ([1]) est du type ($\mathfrak{A}$) si elle est représentable sous la forme

$$(1) \qquad \mathcal{F}(x) = \underset{(n_1, n_2, \ldots)}{\text{Max}}\ \text{Min}[f_{n_1}(x), f_{n_1,n_2}(x), \ldots, f_{n_1,n_2,\ldots,n_k}(x), \ldots],$$

où Max (= la borne supérieure) est pris, en tenant compte de toutes les suites (n_1, n_2, ..., n_k, ...) possibles, et toutes les fonctions $f_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ sont supposées continues. On vérifie les propriétés suivantes des fonctions du type considéré :

1° Si l'on suppose, dans la formule précédente, que les fonctions $f_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ soient elles-mêmes du type ($\mathfrak{A}$), on reviendra toujours à la fonction du même type.

2° Lim. sup. et lim. inf. pour une suite quelconque de fonctions du type ($\mathfrak{A}$) le sont également (par conséquent, toutes les fonctions de M. Baire sont de ce type).

3° Pour que la fonction $\mathcal{F}(x)$ soit du type ($\mathfrak{A}$) il faut et il suffit que l'ensemble $\mathcal{E}[\mathcal{F}(x) > c]$ soit de classe A, quel que soit le nombre réel c [d'où il suit que les fonctions du type ($\mathfrak{A}$) sont mesurables et possèdent bien de la propriété de M. Baire].

Soit $z = \varphi(x, y)$ une fonction de deux variables, définie dans le rectangle (a, b; c, d); nous appellerons dans la suite *l'ombre* de z (sur le plan XOZ) la fonction

$$(2) \qquad \mathcal{F}(x) = \text{Max}\,\varphi(x, y),$$

x étant quelconque mais fixe, et y variant dans l'intervalle (c, d).

4° Si la fonction $\varphi(x, y)$ est du type ($\mathfrak{A}$) son ombre est de même nature ([2]).

([1]) Tous les théorèmes et définitions s'étendent d'eux-mêmes aux fonctions de plusieurs variables.

([2]) Cf. Hausdorff, *Mengenlehre* (2e Aufl., 1927, p. 274).

5° Inversement, quelle que soit la fonction $\mathcal{F}(x)$ du type $(\mathfrak{U})$, il existe une fonction $\varphi(x, y)$ de deux variables qui est g_2 [1] au plus et telle que l'ombre de φ sera précisément $\mathcal{F}$.

6° Il existe une fonction de deux variables $\Phi(x, t)$ du type $(\mathfrak{U})$ qui est *universelle* pour les fonctions d'une variable de ce type; cela veut dire qu'en y fixant t on peut obtenir toutes les fonctions mentionnées et ces fonctions seulement.

Nous dirons que la fonction $\mathcal{F}(x)$ est du type $(\mathfrak{C})$, si l'on a

$$\mathcal{F}(x) = \underset{(n_1, n_2, \ldots)}{\text{Min}} \text{ Max} \{ f_{n_1}(x), f_{n_1,n_2}(x), \ldots, f_{n_1,n_2,\ldots,n_n}(x), \ldots \},$$

où les fonctions $f_{n_1,n_2,\ldots,n_n}(x)$ sont supposées continues. Évidemment, $\mathcal{F}(x)$ est du type $(\mathfrak{C})$, si $\mathcal{F}(x)$ est du type $(\mathfrak{U})$, et seulement dans ce cas.

Signalons maintenant trois critères des fonctions rentrant dans la classification de M. Baire.

7° Pour que $\mathcal{F}(x)$ soit une fonction de Baire, il faut et il suffit :

a. Qu'elle soit à la fois des types $(\mathfrak{U})$ et $(\mathfrak{C})$;

b. Qu'elle soit représentable dans la forme (1) *d'une manière disjonctive;* cela veut dire que, x étant fixe, $\text{Min} f_{n_1,n_2,\ldots,n_n}(x)$ ne diffère de $-\infty$ que pour une suite déterminée $(n_1, n_2, \ldots, n_n, \ldots)$;

c. Qu'elle soit représentable dans la forme (2), $\varphi(x, y)$ étant une fonction g_2 au plus et telle que, si x est fixe, $\varphi(x, y)$ ne diffère de $-\infty$ que pour une seule valeur de y.

8° L'image d'une fonction $\mathcal{F}(x)$ du type $(\mathfrak{U})$, c'est-à-dire l'ensemble plan de points $[x, \mathcal{F}(x)]$, est le produit de deux ensembles A et CA.

D'une manière analogue, on peut rattacher aux classes P_n et C_n des ensembles projectifs les fonctions des types $(\mathfrak{P}_n)$ et $(\mathfrak{C}_n)$, en les définissant, par l'induction, comme il suit : $\varphi(x, y)$ étant du type $(\mathfrak{C}_{n-1})$, la fonction $\mathcal{F}(x) = \underset{y}{\text{Max}}\, \varphi(x, y)$ sera, par définition, du type $(\mathfrak{P}_n)$, si $\Psi(x, y)$ est du type $(\mathfrak{P}_{n-1})$, la fonction $\mathcal{F}(x) = \underset{y}{\text{Min}}\, \Psi(x, y)$ sera du type $(\mathfrak{C}_n)$ [2]. Signalons l'énoncé suivant :

Si la fonction $Z = f(y)$ est du type $(\mathfrak{P}_{n+1})$ au plus, et la fonction

---

[1] C'est-à-dire la limite d'une suite décroissante des fonctions semi-continues inférieurement.

[2] Le premier exemple d'une fonction, rentrant dans cette classification, est dû à M. H. Lebesgue (voir la Note de M. N. Lusin, *Comptes rendus*, 180, 1925, p. 1818). De même, la fonction dont il s'agit dans un problème posé par M. Lusin (*Fund. Math.*, 11, 1928, p. 308) appartient également à la classification du texte.

$y = g(x)$ est du type ($\mathfrak{P}_n$) au plus, la fonction composée $\mathcal{F}(x) = f[g(x)]$ sera du type ($\mathfrak{P}_{n+1}$) au plus ([1]).

Enfin, l'idée de la δs-fonction de M. Hausdorff suggère la considération d'une fonctionnelle suivante :

$$\Phi\,|[f_1(x), f_2(x), \ldots]| = \operatorname*{Max}_{\nu \in \mathfrak{N}} \operatorname*{Min}_{i} f_{n_i}(x),$$

où Max est pris, en tenant compte de toutes les suites $\nu = (n_1, n_2, \ldots)$ rentrant dans un ensemble $\mathfrak{N}$ de telles suites. Les fonctions des classes ($\mathfrak{B}_n$) et ($\mathfrak{C}_n$) et les fonctionnelles ci-dessus donnent lieu aux propositions tout à fait analogues à celles des trois Notes précédentes ([2]).

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Les singularités d'une fonctionnelle analytique linéaire d'une fonction de plusieurs variables.* Note ([3]) de M. **Luigi Fantappiè**, transmise par M. Vito Volterra.

On appelle *fonction indicatrice* d'une fonctionnelle analytique et *linéaire*

$$F[y(t_1, t_2, \ldots, t_n)]$$

la fonction analytique

$$(1) \qquad v(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = F\left[\frac{1}{(t_1 - \alpha_1)(t_2 - \alpha_2)\ldots(t_n - \alpha_n)}\right].$$

On peut démontrer ([4]) que la valeur d'une détermination quelconque de F est donnée par l'expression intégrale (qu'on appelle produit fonctionnel $\overset{*}{\underset{*}{v y}}$ de l'indicatrice v pour la fonction y) :

$$(2) \quad F[y(t_1, t_2, \ldots, t_n)] = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\int_\Gamma \cdots \int v(t_1, t_2, \ldots, t_n) y(t_1, t_2, \ldots, t_n)\, dt_1\, dt_2 \ldots dt_n = \overset{*}{\underset{*}{v y}} = v(\underset{*}{t_1}, \underset{*}{t_2}, \ldots, \underset{*}{t_n})\, y(\overset{*}{t_1}, \overset{*}{t_2}, \ldots, \overset{*}{t_n}).$$

([1]) M. E. Livenson avait établi antérieurement une proposition moins précise (non publiée) que voici : si f est ($\mathfrak{P}_n$) au plus et g est ($\mathfrak{P}_n$) au plus, la fonction $f(g)$ sera ($\mathfrak{P}_{m+n}$) au plus.

([2]) Voir la Note de L. Kantorovitch et E. Livenson, *Comptes rendus*, **190**, 1930, p. 353.

([3]) Séance du 26 mai 1930.

([4]) Voir, pour ces définitions et pour la démonstration dans le cas $n = 2$, mes Notes : *I funzionali lineari delle funzioni di due variabili complesse* (*Rend. Lincei*, 6e série, **7**, 1928, p. 216, 384, 710).

La variété d'intégration Γ est un cycle fermé, à n dimensions (dans l'espace à $2n$ dimensions des systèmes de n nombres complexes) qui ne doit pas rencontrer les variétés singulières Σ_v, Σ_y de v et y, d'équation

$$(3) \qquad s(t_1, t_2, \ldots, t_n) = 0, \qquad \sigma(t_1, t_2, \ldots, t_n) = 0,$$

respectivement, ni peut se réduire en dimension, par déformation continue, sans rencontrer ces variétés, c'est-à-dire que Γ est *enlacée* avec l'ensemble de Σ_v, Σ_y, tandis qu'elle ne l'est pas avec Σ_v, Σ_y, considérées séparément. Ces propriétés topologiques de la variété Γ d'intégration (qu'on appelle *séparatrice* de Σ_v, Σ_y) nous permettent de démontrer que, *pour les fonctions singulières de* F, *la matrice jacobienne*

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial s}{\partial t_1} & \frac{\partial s}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial s}{\partial t_n} \\ \frac{\partial \sigma}{\partial t_1} & \frac{\partial \sigma}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial \sigma}{\partial t_n} \end{vmatrix} = 0$$

(c'est-à-dire qu'elle doit avoir sa caractéristique < 2) *sur quelque point de l'intersection* (3) *de* Σ_v, Σ_y (*la variété singulière* Σ_y *y doit être « tangente » à la variété singulière* Σ_v *de l'indicatrice*); (3) et (4) donnent en tout $n+1$ conditions pour les n variables t_i. Si v et y contiennent des paramètres z_r, α_s respectivement, *la valeur* (2) *de la fonctionnelle est une fonction de ces paramètres qui peut être singulière seulement sur la variété, dont on a l'équation* (*en* z_r, α_s) *en éliminant les* n *variables* t_i *des* $n+1$ *équations* (3) *et* (4).

Dans les Notes citées, ces propriétés ont été démontrées pour le cas $n=2$. Pour les démontrer en général, il suffit de prouver qu'elles sont vraies pour une valeur n en les supposant vraies pour la valeur $n-1$. Or, l'expression (2) de F peut se mettre sous la forme

$$(5) \qquad F[y(t_1, t_2, \ldots, t_n)] = \frac{1}{2\pi i}\int_C v(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, t_n)\, y(\overset{*}{t}_1, \overset{*}{t}_2, \ldots, \overset{*}{t}_{n-1}, t_n)\, dt_n,$$

où C est une courbe convenable du plan complexe t_n, qui renferme quelques-uns des points singuliers de la fonction à intégrer

$$\varphi(t_n) = v(t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n)\, y(\overset{*}{t}_1, \ldots, \overset{*}{t}_{n-1}, t_n)$$

et en laisse d'autres à l'extérieur. Lorsque y varie avec continuité, l'intégration ne pourra plus se faire seulement si l'un de ces points extérieurs vient coïncider avec un point intérieur, car alors C (et aussi la variété séparatrice Γ) vient passer forcément par ce point singulier. Mais

pour les valeurs singulières t_n de $\varphi(t_n)$, l'hyperplan $t_n = \bar{t}_n$ doit couper Σ_ν, Σ_y en deux variétés *tangentes* dans un point [car le théorème est vrai pour les produits fonctionnels par rapport à $n-1$ variables, comme $\varphi(t_n)$], donc cet hyperplan doit être *tangent* dans ce point à l'intersection (3) de Σ_ν et Σ_y. Deux valeurs singulières de $\varphi(t_n)$ pourront alors coïncider seulement s'il y a un hyperplan qui devient *bitangent*. Or, si l'intersection de Σ_ν et Σ_y a partout des points simples, on peut toujours choisir n faisceaux d'hyperplans $t_i =$ const., comme hyperplans coordonnés, de façon qu'il n'y ait pas d'hyperplans bitangents dans aucun de ces faisceaux. *Le cas singulier pourra donc se présenter seulement si, lorsque y varie avec continuité, l'intersection de Σ_ν et Σ_y, qui varie aussi, vient acquérir un point multiple;* alors, dans un faisceau quelconque d'hyperplans, il y en a toujours deux au moins, tangents à cette intersection variable, qui viennent passer pour le point multiple et coïncident. Mais la condition nécessaire et suffisante afin que l'intersection de Σ_ν et Σ_y ait un point multiple est juste donnée par (3) et (4) (Σ_ν et Σ_y doivent être *tangentes* quelque part), donc on en conclut le théorème énoncé.

ÉLASTICITÉ. — *Sur la théorie du spiral.* Note [1] de M. **J. Haag**, présentée par M. G. Kœnigs.

1. J'ai indiqué [2] une méthode générale d'étude du spiral, qui est une extension de la méthode de Resal-Caspari. En principe, cette méthode peut être indéfiniment poursuivie et devenir une *méthode d'approximations successives*, ainsi que je le montrerai dans un prochain Mémoire. En pratique, les données physiques du problème ne paraissent pas assez précises pour qu'il soit utile de pousser au delà de la deuxième approximation.

Les formules générales concernant cette deuxième approximation ont été données dans la Note précitée. Voici maintenant des résultats plus complets.

2. Soient x, y les coordonnées d'un point quelconque M du spiral, *à l'état naturel.* Posons $z = x + iy$ et considérons le nombre complexe

$$w = \frac{i\theta}{L}\int_A^B z\, e^{i\theta\frac{s}{L}}\, ds. \tag{1}$$

(1) Séance du 26 mai 1930.

(2) *Comptes rendus*, 189, 1929, p. 142.

Si on le met sous la forme $u+iv$, les quantités u et v sont celles que j'ai introduites dans ma précédente Note.

L'affixe du centre de gravité est

$$(2)\qquad \xi+i\eta=\frac{1}{L}\int_A^B z\,e^{i\theta\frac{s}{L}}\left[1+i\theta\left(\frac{s}{L}-j\right)\right]ds,$$

où j désigne le rapport des carrés des rayons de giration h et k du spiral, calculés respectivement avec les densités s et 1.

La *perturbation d'isochronisme* est donnée par l'élégante formule

$$(3)\qquad \frac{\Delta T}{T}=-\frac{1}{k^2L^2}\int\int\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'}\,F\left(\theta_0\frac{\widehat{MM'}}{L}\right)ds\,ds',$$

en posant

$$F(x)=J_0(x)-x\,J_1(x),$$

où J_0 et J_1 désignent les *fonctions de Bessel* bien connues.

La *perturbation due au poids du spiral* est

$$(4)\qquad \frac{\Delta T}{T}=\frac{mL}{EI}\vec{g}.\vec{Z},$$

en posant

$$(5)\qquad \vec{Z}=\frac{1}{L^2}\int_A^B\overrightarrow{OM}.s\left[\left(j-\frac{s}{L}\right)J_0\left(\theta_0\frac{s}{L}\right)-\frac{1}{\theta_0}J_1\left(\theta_0\frac{s}{L}\right)\right]ds.$$

3. Les formules (1), (2), (3) et (5) m'ont conduit à envisager, plus généralement, le vecteur

$$(6)\qquad \vec{V}=\frac{1}{L}\int_A^B\overrightarrow{OM}\,f(M)\,ds,$$

où $f(M)$ désigne une fonction du point M, satisfaisant à certaines conditions, qui sont toutes remplies dans le cas des formules (1), (2), (3) et (5). Appelons $f'_A(M)$ la dérivée de cette fonction par rapport à s, prise en allant vers le piton A. Appelons, de même, $f'_B(M)$ la dérivée prise en allant vers la virole B. Supposons maintenant le spiral muni de deux *courbes terminales* AA' et BB'. Appelons g_i le centre de gravité d'ordre i de AA' et p_i la position théorique qu'il devrait avoir en vertu des conditions de Phillips généralisées [1]. Appelons enfin g'_i et p'_i les points analogues relatifs à la

---

[1] J. Haag, *Extension des conditions de Phillips concernant le spiral* (*Comptes rendus*, 189, 1929, p. 86).

courbe BB′; l et l' les longueurs des deux courbes; a la dérivée du rayon vecteur du spiral proprement dit par rapport à l'angle polaire, cette dérivée étant prise en valeur absolue. On a, avec une approximation pratiquement suffisante (¹),

$$\begin{aligned} L\vec{V} &= l f(A')\overrightarrow{p_1 g_1} + l' f(B')\overrightarrow{p'_1 g'_1} \\ &+ \frac{l^2}{2} f'_A(A')\overrightarrow{p_2 g_2} + \frac{l'^2}{2} f'_B(B')\overrightarrow{p'_2 g'_2} \\ &+ 2a\left[f(A')\overrightarrow{OA'} - f(B')\overrightarrow{OB'}\right]. \end{aligned}$$

En appliquant cette formule générale aux formules (1), (2), (3) et (5), on obtient la réaction d'encastrement, le centre de gravité, la perturbation d'isochronisme et la perturbation due au poids du spiral.

J'ai développé complètement les *conséquences pratiques* qui résultent de cette théorie, concernant le *réglage des chronomètres*. Elles seront publiées dans un autre recueil.

MÉCANIQUE CÉLESTE. — *Sur la vitesse de propagation de l'attraction.* Note de M. **Jean Chazy**, présentée par M. Ernest Esclangon.

On sait que Laplace et Lehmann-Filhès ont supposé que dans la théorie newtonienne l'attraction pouvait avoir une vitesse de propagation finie (²), et ils ont calculé les corrections à ajouter à la force classique pour tenir compte des mouvements des planètes par rapport au Soleil et du mouvement de translation du système solaire vers l'apex. Les effets calculés sont des *effets du premier ordre*, et devraient produire des accélérations séculaires des moyens mouvements planétaires. Comme de telles accélérations ne résultent pas des observations, on ne peut leur attribuer que des valeurs extrêmement faibles, et par suite, dans les deux hypothèses, la vitesse de propagation de l'attraction devrait être supérieure à plus d'un million de fois la vitesse de la lumière. Les limites inférieures ainsi obtenues ont paru déconcertantes. En fait les deux hypothèses de Laplace et de Lehmann-Filhès ne sont pas considérées comme des compléments nécessaires de la théorie newtonienne, mais n'ont pas été non plus remplacées par d'autres hypothèses précises; dans la théorie newtonienne, presque toujours l'attraction est envisagée comme une action instantanée à distance.

(¹) On pourrait pousser indéfiniment ce développement; mais cela n'aurait aucune utilité pratique.

(²) Cf. Tisserand, *Traité de Mécanique céleste*, 4, p. 494.

Dans une Note encore récente ([1]), M. Kogbetliantz a calculé dans la théorie newtonienne, selon le même principe que Laplace, la correction résultant du mouvement de rotation d'une masse attractive. Il obtient un *effet du premier ordre* aussi par rapport au quotient de la vitesse de rotation de cette masse par la vitesse V de propagation de l'attraction, et a proposé, au moyen de cet effet, de mesurer dans une expérience de laboratoire la vitesse V, si celle-ci est de l'ordre de la vitesse de la lumière.

Le même calcul s'applique à l'effet de la rotation du Soleil sur le mouvement des planètes, ou de la rotation de la Terre sur le mouvement de la Lune. Si une sphère homogène de rayon R tourne autour d'un axe fixe avec la vitesse angulaire constante ω, la force corrective obtenue dans le plan d'équateur, à la distance a du centre, est perpendiculaire au rayon vecteur, en sens inverse du mouvement de rotation, et égale au produit de l'attraction newtonienne par un coefficient dont la valeur principale est $\frac{\omega R^2}{5 V a}$ pour les grandes valeurs de a. Il en résulte que, comme dans l'hypothèse de Laplace, les mouvements des planètes devraient présenter une accélération séculaire; la longitude moyenne l serait au bout du temps t augmentée de la quantité

$$\delta l = \frac{3}{10} (nt)^2 \frac{\omega R^2}{V a};$$

ω et R désignent la vitesse de rotation supposée uniforme, et le rayon du Soleil, n et a le moyen mouvement et la distance au Soleil de la planète considérée.

Dès lors, si l'on admet comme résultat des observations que l'accroissement séculaire de la longitude ne peut dépasser 2″ pour la Terre et 0″,5 pour Mercure, et si l'on cherche à expliquer une accélération séculaire de la Lune de 2″ au plus par siècle, *on obtient trois limites inférieures de la vitesse* V, *voisines respectivement de* 380 *fois*, 70000 *fois et* 56000 *fois la vitesse de la lumière :* tandis que l'hypothèse de Laplace donnait les limites de 6 millions, 700 millions et 37 millions de fois la vitesse de la lumière.

On peut conclure que l'expérience proposée se trouve en quelque sorte réalisée dans les mouvements des astres. En effet il serait surprenant que la vitesse V que nous venons de considérer possède deux valeurs différentes, et que sa mesure au laboratoire soit inférieure aux limites données par la Mécanique céleste. Néanmoins il est nécessaire de compléter la théorie new-

---

([1]) *Comptes rendus*, **186**, 1928, p. 944.

tonienne au point de vue de la propagation de l'attraction, et de faire des hypothèses : si, comme l'affirme M. Kogbetliantz, la vitesse V pouvait être effectivement mesurée dans une expérience de laboratoire dans le cas où elle serait de l'ordre de la vitesse de la lumière, il serait à souhaiter que la mesure fût tentée.

Il importe d'ajouter que *dans la théorie de la Relativité*, si des masses sont en mouvement, il n'y a pas pour une masse d'épreuve placée sans vitesse au voisinage, d'effet du premier ordre dû à ce mouvement; *il existe seulement des effets du second ordre* [1] par rapport à l'ensemble des vitesses de cette masse d'épreuve et des masses données : par exemple, dans les mouvements planétaires, des retards des périhélies et des avances des nœuds, d'ailleurs insensibles, par suite de la rotation du Soleil.

Au total, *si l'expérience proposée donnait un résultat positif, ce résultat constituerait une objection à la fois à la théorie newtonienne et à la théorie de la Relativité.*

ASTRONOMIE. — *Sur l'orbite de l'astre transneptunien découvert à l'observatoire Lowell.* Note de M. N. **Stoyko**, présentée par M. Ernest Esclangon.

La période actuelle de visibilité de l'astre Lowell ayant pris fin, on peut essayer de déterminer l'orbite d'après toutes les observations connues de 1930. En première approximation, j'ai calculé une orbite à partir de trois lieux normaux (mars 16, avril 1 et 26) d'après la méthode de M. E. Esclangon [2]. Il a été tenu compte de l'aberration et de la parallaxe. Pour simplifier les calculs, j'ai introduit, au lieu des distances géocentriques ρ_1, ρ_2, ρ_3 considérées par M. Esclangon, les coordonnées rectilignes géocentriques ξ_1, η_1, ζ_1, ... En posant

$$p_i = \cot \alpha_i, \qquad q_i = \operatorname{tang} \delta_i \operatorname{coséc} \alpha_i,$$

---

(1) Comme il résulte facilement de la formule du ds^2 définissant le champ de gravitation des masses données (voir par exemple Chazy, *La théorie de la Relativité et la Mécanique céleste*, **2**, p. 170 et 174). Pour rapporter la masse d'épreuve à des axes liés au corps central et tournant avec lui, il suffit, dans l'expression de ce ds^2, de remplacer les différentielles des coordonnées selon les formules classiques du mouvement de rotation : M. Crudeli (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, **54**, 1930, p. 6) emploie un ds^2 d'une formation analogue pour expliquer l'effet Miller.

(2) *Comptes rendus*, **190**, 1930, p. 1085.

on a

$$\xi_i = p_i \eta_i, \qquad \zeta_i = q_i \eta_i, \tag{1}$$

et les équations fondamentales de la méthode prennent la forme

$$\left\{\begin{aligned} &(x_1+p_1\eta_1)(t_2-t_3-\theta)+(x_2+p_2\eta_2)(t_3-t_1-\theta)+(x_3+p_3\eta_3)(t_1-t_2-\theta)=0,\\ &(y_1+\quad\eta_1)(t_2-t_3-\theta)+(y_2+\quad\eta_2)(t_3-t_1-\theta)+(y_3+\quad\eta_3)(t_1-t_2-\theta)=0,\\ &(z_1+q_1\eta_1)(t_2-t_3-\theta)+(z_2+q_2\eta_2)(t_3-t_1-\theta)+(z_3+q_3\eta_3)(t_1-t_2-\theta)=0. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Résolues par rapport à η_1, η_2, η_3, elles donnent les autres coordonnées d'après (1). Ainsi, le 6,00000 avril, les coordonnées rectilignes héliocentriques équatoriales et les composantes de la vitesse prennent les valeurs

$$\left\{\begin{aligned} &X_0=-13,146142, &&Y_0=+35,368048, &&Z_0=+15,214902,\\ &X'_0=-\ \ 0,00713955, &&Y'_0=+\ \ 0,01322776, &&Z'_0=+\ \ 0,00649849. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Pour améliorer ces résultats, j'ai utilisé la méthode de variation des coordonnées géocentriques. Si l'éphéméride, calculée en partant des deux lieux extrêmes (t_1, t_2), donne, pour la date t_3, les valeurs ξ_3, η_3, ζ_3, et si les erreurs correspondantes sont $\Delta\xi_3$, $\Delta\eta_3$, $\Delta\zeta_3$, on a

$$\xi_3+\Delta\xi_3=p_3(\eta_3+\Delta\eta_3), \qquad \zeta_3+\Delta\zeta_3=q_3(\eta_3+\Delta\eta_3);$$

d'où

$$\xi_3-p_3\eta_3=p_3\,\Delta\eta_3-\Delta\xi_3, \qquad \zeta_3-q_3\eta_3=q_3\,\Delta\eta_3-\Delta\zeta_3. \tag{4}$$

En différentiant les équations (2) et tenant compte de (1), on obtient

$$\Delta\xi_1(t_2-t_3-\theta)+\Delta\xi_2(t_3-t_1-\theta)+\Delta\xi_3(t_1-t_2-\theta)=0 \tag{5}$$

et deux équations analogues pour $\Delta\eta_1$, ..., $\Delta\zeta_1$, ... Posons

$$\tau_1=-\frac{t_2-t_3-\theta}{t_1-t_2-\theta}, \qquad \tau_2=\frac{t_3-t_1-\theta}{t_1-t_2-\theta}.$$

On tire alors de (5)

$$\Delta\xi_3=\tau_1\,\Delta\xi_1+\tau_2\,\Delta\xi_2, \qquad \Delta\eta_3=\tau_1\,\Delta\eta_1+\tau_2\,\Delta\eta_2, \qquad \Delta\zeta_3=\tau_1\,\Delta\zeta_1+\tau_2\,\Delta\zeta_2.$$

En introduisant ces valeurs dans (4), on a

$$\left\{\begin{aligned} &\xi_3-p_3\eta_3=p_3\tau_1\,\Delta\eta_1+p_3\tau_2\,\Delta\eta_2-\tau_1\,\Delta\xi_1-\tau_2\,\Delta\xi_2,\\ &\zeta_3-q_3\eta_3=q_3\tau_1\,\Delta\eta_1+q_3\tau_2\,\Delta\eta_2-\tau_1\,\Delta\zeta_1-\tau_2\,\Delta\zeta_2. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

A chaque lieu normal correspondent deux équations du type (6), où les inconnues sont

$$\Delta\xi_1, \quad \Delta\eta_1, \quad \Delta\zeta_1 \qquad \text{et} \qquad \Delta\xi_2, \quad \Delta\eta_2, \quad \Delta\zeta_2.$$

Dans les équations (6) on a introduit les valeurs ξ_3, η_3, ζ_3, calculées en partant de (3) pour 12 lieux normaux formés d'après 63 observations, du 16 mars au 2 mai. En résolvant ces 24 équations, on trouve

$$(7)\quad \begin{cases} \Delta\xi_1 = +0,003533, & \Delta\eta_1 = -0,009515, & \Delta\zeta_1 = -0,004240, \\ \Delta\xi_2 = -0,036741, & \Delta\eta_2 = +0,106710, & \Delta\zeta_2 = +0,045821. \end{cases}$$

Ces corrections sont un peu fortes. Au moyen de 10 nouvelles observations récemment communiquées, j'ai fait une seconde approximation par la même méthode. D'après 30 équations du type (6) on a ainsi trouvé :

$$(8)\quad \begin{cases} \Delta\xi'_1 = +0,026916, & \Delta\eta_1 = -0,078631, & \Delta\zeta'_1 = -0,033795, \\ \Delta\xi'_2 = -0,001012, & \Delta\eta'_2 = +0,002900, & \Delta\zeta'_2 = +0,001219. \end{cases}$$

D'où, à la date 6,00000 avril :

$$(9)\quad \begin{cases} X_0 = -13,149807, & Y_0 = +35,378817, & Z_0 = +15,219420, \\ X'_0 = -\ \ 0,00879076, & Y'_0 = +\ \ 0,01801529, & Z'_0 = +\ \ 0,00855814. \end{cases}$$

En partant de ces valeurs, j'ai obtenu $R_0 = 40,696546$ et

$$(10)\quad \begin{cases} v_0 = 0,02170224, & v_r = 0,02170224, & v_n = 0,00202052. \\ \Omega = 109^\circ 15' 33'', & i = 21^\circ 36' 52''. & \mu_0 = 10'',241. \end{cases}$$

Ces éléments représentent les observations avec des erreurs de $0^s,05$ en α et $0'',5$ en δ.

Comme la vitesse absolue varie beaucoup d'une approximation à l'autre (de 0,0164 à 0,0217), on ne peut accorder aucune confiance à la valeur de l'excentricité hyperbolique qu'on en déduit. La vitesse normale au rayon vecteur (v_n) dans le plan de l'orbite est plus constante; elle varie seulement de 0,0021 à 0,0020 d'une approximation à l'autre. Elle donne pour limite inférieure d'excentricité 0,407. La question de l'excentricité de l'orbite n'est donc pas tranchée d'après les observations connues de 1930.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *Sur l'interprétation de l'expérience de Michelson*. Note [1] de M. **J. Le Roux**, présentée par M. G. Kœnigs.

M. Hadamard a démontré des propriétés importantes concernant les ondes dont la propagation est définie par une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre.

---

[1] Séance du 26 mai 1930.

Il m'a paru intéressant d'appliquer ces résultats à la discussion des conséquences de l'expérience de Michelson.

Considérons d'abord l'équation suivante, où x, y, z désignent des coordonnées cartésiennes rectangulaires et t le temps.

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}-\frac{2\alpha}{c}\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial t}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}=0.$$

L'application de la méthode de M. Hadamard montre que les rayons ou bicaractéristiques sont rectilignes et que, sur chacun d'eux, la vitesse de propagation est constante. Mais cette vitesse change avec la direction du rayon.

Si l'on porte, sur les rayons issus de l'origine, des longueurs proportionnelles aux vitesses de propagation correspondantes, le lieu des extrémités de ces vecteurs est un ellipsoïde de révolution allongé ayant pour foyer l'origine.

Nous nous trouvons donc ici dans le cas d'ondes ellipsoïdales signalées par Poincaré [1] et par M. E. Guillaume (*Congrès de Strasbourg*, p. 602).

Par le changement de variables

$$(2) \qquad \begin{cases} x'=x-2c\alpha t, \\ y'=y; \quad z'=z, \quad t'=t, \end{cases}$$

l'équation (1) conserve la même forme, sauf le changement de signe de α.

Le changement de variable considéré équivaut à une translation rectiligne et uniforme des axes. La nouvelle origine coïncide avec le second foyer de l'onde ellipsoïdale.

A cette simple remarque géométrique correspond une propriété physique importante.

Les ondes qui interviennent dans l'expérience de Michelson ne sont pas les ondes de progression, ce sont les ondes d'interférence, que j'ai signalées dans des travaux antérieurs [2].

Or les ondes d'interférence correspondant à la loi de propagation définie par l'équation (1) sont sphériques dans le cas d'une source ponctuelle liée à l'un ou à l'autre des deux systèmes de référence considérés.

Cette observation s'applique immédiatement à l'interprétation de l'expérience de Michelson. Il est nécessaire toutefois d'en rattacher le résultat à une loi générale, dans laquelle la Terre ne joue aucun rôle spécial, différent

(1) *Science et Méthode*, p. 239.

(2) *Journal de Mathématiques*, 1, 1922, p. 223.

de celui des autres astres. Pour cela il faut admettre que la constitution de l'éther se trouve influencée par la gravitation. Le milieu de propagation n'étant plus indéfiniment homogène et isotrope, l'équation à coefficients constants (1) devrait être remplacée par une équation à coefficients variables. Il restera à déterminer ces coefficients par la condition que, dans le voisinage immédiat d'une masse matérielle en mouvement de translation, l'onde d'interférence tende vers l'isotropie, comme forme limite.

Je suppose que le système de référence S appartienne au solide principal de référence de l'Univers observable, et que le temps t soit le temps canonique de la gravitation.

Il est possible de déterminer l'équation aux dérivées partielles de la propagation, de manière à satisfaire aux conditions suivantes :

1° Dans toute région suffisamment éloignée de la matière, la vitesse de propagation par rapport à S est la même dans tous les sens.

2° Dans tout domaine restreint, voisin ou non de la matière, l'onde d'interférence engendrée par une source invariablement liée à S est isotrope.

3° Dans tout domaine suffisamment restreint, l'onde d'interférence engendrée par une source invariablement liée à un élément quelconque de matière en translation est également isotrope.

Parmi les diverses solutions possibles, je signale la suivante, qui se rattache d'une manière particulièrement simple à la théorie de la gravitation.

Soit M_i un élément matériel de masse m_i, dont la vitesse de translation a pour composantes ξ'_i, η'_i, ζ'_i. Je désigne par r_i la distance du point M_i à un point courant quelconque $P(x, y, z)$.

Je pose

$$\mathrm{D}(\mathrm{V}) = \left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t}\,\frac{\sum \frac{m_i}{r_i}\left(\xi'_i\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x} + \eta'_i\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y} + \zeta'_i\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z} + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t}\right) + h\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t}}{\sum \frac{m_i}{r_i} + h},$$

où la somme Σ est étendue à l'ensemble des masses observables; h désigne une constante.

L'équation du second ordre

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \mathrm{D}}{\partial\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\right)} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \mathrm{D}}{\partial\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}\right)} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \mathrm{D}}{\partial\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z}\right)} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathrm{D}}{\partial\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t}\right)} = 0$$

satisfait aux conditions énoncées.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *Sur le problème du mur soutenant un massif pulvérulent.* Note [1] de M. **Edgar Baticle.**

Dans une Note présentée à la séance de l'Académie du 12 avril 1926, nous avions envisagé une solution utilisant, outre la solution de Rankine, une intégrale particulière du système d'équations différentielles donné par Boussinesq [2] et M. Guillaumin [3]. Mais un examen plus approfondi nous a permis de reconnaître que, si cette intégrale particulière :

$$\chi = \pm\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) + \theta, \qquad P\cos\varphi = \varpi\cos(\varphi \mp \theta)$$

(χ étant l'azimut, compté, comme θ, à partir de la verticale descendante Oy, de l'une des directions principales, Pr la pression moyenne et ϖ le poids spécifique du massif) satisfait bien aux dites équations, les valeurs de χ' et de P' qui en résultent ne satisfont pas aux équations initiales, déduites des équations indéfinies :

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = \varpi.$$

En effet, si l'on pose (pour satisfaire à la condition d'équilibre limite de Rankine)

$$(N_x - N_y)^2 + 4T^2 = (N_x + N_y)^2\sin^2\varphi,$$

$$N_x = Pr(1 - \cos 2\chi \sin\varphi), \qquad N_y = Pr(1 + \cos 2\chi \sin\varphi), \qquad T = Pr\sin 2\chi \sin\varphi,$$

on obtient le système suivant :

$$(1)\quad \begin{cases} P[\sin\theta + \sin\varphi\sin(2\chi - \theta)(1 + 2\chi')] + P'[\cos\theta - \sin\varphi\cos(2\chi - \theta)] = 0, \\ P[\cos\theta + \sin\varphi\cos(2\chi - \theta)(1 + 2\chi')] + P'[-\sin\theta + \sin\varphi\sin(2\chi - \theta)] = \varpi, \end{cases}$$

les variables étant $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \text{arc tang}\,\frac{x}{y}$ et χ étant supposé fonction de θ seul.

L'intégrale particulière ci-dessus des équations de Boussinesq, obtenue en éliminant successivement P' et χ', ne satisfait pas à ce système, mais satisferait à un système analogue où χ' serait remplacé par $-\chi'$. On ne peut donc pas supposer que sur le parement du mur P' et χ' ont des valeurs finies : ainsi se trouve vérifiée une assertion de M. Guillaumin.

---

[1] Séance du 19 mai 1930.

[2] *Comptes rendus*, **164**, 1917, p. 698.

[3] *Comptes rendus*, **168**, 1919, p. 818.

Soit α l'azimut du parement intérieur du mur, lequel doit, par hypothèse, être une ligne de glissement du massif. On a ainsi

$$2\chi - 2\alpha = \pm\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right),$$

le signe + correspondant au cas où le massif se rompt par soulèvement et le signe — à celui où il se rompt par affaissement. Nous allons chercher une solution approximative, valable entre le parement α et un certain azimut θ_0, à partir duquel on a, jusqu'à la surface libre, la solution de Rankine : $\chi = \text{const.} = \chi_0$, qui donne, rigoureusement,

$$P = \varpi \frac{\cos\theta - \sin\varphi \cos(2\chi_0 - \theta)}{\cos^2\varphi},$$

χ_0 sera déterminé par la condition à la surface libre

$$\sin i + \sin\varphi \sin(2\chi_0 - i) = 0,$$

et θ_0 sera choisi tel que l'on ait

$$2\chi_0 - 2\theta_0 = -\frac{\pi}{2} + \varphi.$$

en envisageant le cas, généralement admis dans la pratique, où l'équilibre est sur le point d'être rompu par affaissement.

Nous poserons

$$2\chi = -\frac{\pi}{2} + \varphi + 2\theta + \varepsilon.$$

Du système (1) on tire l'équation différentielle suivante :

$$(2) \qquad \frac{2\chi''[\sin\varphi - \cos(2\chi - 2\theta)] + 2\chi' \sin(2\chi - 2\theta)(2\chi' - 2)}{\cos^2\varphi - 2\chi' \sin\chi[\sin\varphi - \cos(2\chi - 2\theta)]} + \frac{4\chi' \sin(2\chi - \theta)}{\cos\theta - \sin\varphi\cos(2\chi - \theta)} = 0.$$

Si l'on suppose que ε reste petit dans l'intervalle (α, θ_0), cette équation peut se simplifier. Elle devient

$$(3) \qquad \varepsilon\varepsilon'' + (\varepsilon' + 2)^2 - 2(\varepsilon' + 2)\varepsilon\varepsilon' \operatorname{tang}\varphi = 0,$$

ou, en faisant le changement de variables : $\varepsilon' + 2 = -\frac{1}{y}$, et en posant $\operatorname{tang}\varphi = m$,

$$(4) \qquad \varepsilon\frac{dy}{d\varepsilon} + \frac{y}{2y+1} - 2m\varepsilon y.$$

Tant que y reste fini, on a l'équation approchée

$$(5) \qquad \varepsilon \frac{dy}{d\varepsilon} = \frac{y}{2y+1}.$$

Si y est infiniment grand, on a

$$\varepsilon \frac{dy}{d\varepsilon} = \frac{1}{2} - 2m\varepsilon y.$$

En posant $y = \mathrm{U}e^{-2m\varepsilon}$, on trouve aisément pour U le développement

$$\mathrm{U} = \mathrm{B} + \frac{1}{2}\log\varepsilon + m\varepsilon + \ldots, \quad \text{d'où} \quad y\varepsilon = e^{-2m\varepsilon}\left(\mathrm{B}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon\log\varepsilon + m\varepsilon^2 + \ldots\right).$$

On voit ainsi que $y\varepsilon$ est un infiniment petit.

Il en résulte que l'on pourra toujours prendre pour équation approchée l'équation (5) qui admet l'intégrale $\varepsilon = \mathrm{C}ye^{2y}$.

En tenant compte de l'équation définissant y on trouve

$$\theta - \alpha = \mathrm{C}\left[e^{2y}\left(\frac{y}{2} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}\right].$$

Comme y est égal à $-\infty$ pour $\theta = \theta_0$, on a $-\mathrm{C} = 4(\theta_0 - \alpha)$.

On en déduit

$$\mathrm{P} = \varpi \frac{\cos(\varphi - \alpha)}{\cos\varphi - \varepsilon\varepsilon'\sin\varphi} = \varpi \frac{\cos(\varphi - \alpha)}{\cos\varphi + 4(\theta_0 - \alpha)\sin\varphi}.$$

D'où l'expression de la poussée normale

$$\mathrm{P}r\cos^2\varphi = \varpi r \frac{\cos(\varphi - \alpha)\cos\varphi}{1 + 4(\theta_0 - \alpha)\operatorname{tang}\varphi}.$$

PHYSIQUE MOLÉCULAIRE. — *Stratifications cristallines colorées. Étude de la paratoluidine, de la β-naphtylamine, de la diphénylamine.* Note [1] de Mlle **Simone Boudin**, présentée par M. Jean Perrin.

M. René Marcelin (*Ann. de Phys.*, 9e série, 10, 1918) a montré que lorsqu'on provoque la cristallisation d'une solution légèrement alcoolique de paratoluidine, il apparaît à la surface du liquide des cristaux à contours de losange, avec parfois deux troncatures sur les angles obtus ; on observe ces cristaux en lumière blanche au moyen d'un microscope autocollimateur.

---

[1] Séance du 26 mai 1930.

Ces cristaux, lorsqu'ils sont assez minces, présentent, comme les lames de savon stratifiées découvertes par M. Jean Perrin, des plages à colorations différentes, séparées les unes des autres par des bords nets. L'étude colorimétrique de ces plages et l'observation de leur développement ont permis à René Marcelin de mesurer l'épaisseur du feuillet élémentaire de cristallisation de la paratoluidine ($0,4 < e < 0^{\mu\mu},8$, soit un échelon moléculaire), et d'observer à l'échelle moléculaire le développement des cristaux aussitôt après leur naissance.

Je me suis proposée, d'une part, de reproduire les expériences de René Marcelin, et de préciser techniquement les conditions les plus favorables à l'obtention de beaux cristaux flottants à stratifications colorées, d'autre part, de rechercher d'autres corps organiques susceptibles de présenter les phénomènes décrits par M. Marcelin.

Le mode opératoire est le suivant : on prépare une solution à $\frac{1}{10}$ de paratoluidine dans l'eau ou dans un mélange d'eau et d'alcool, et l'on remplit de cette solution un petit cristallisoir de 2 à 3^{cm} de diamètre. La surface libre du liquide, sur laquelle on observe les cristaux, doit être de petites dimensions, pour éviter autant que possible les mouvements des cristaux dus à des trépidations extérieures. On chauffe la solution avec un bec Bunsen; vers 45°, la paratoluidine fond en gouttelettes légèrement jaunâtres : certaines surnagent et d'autres restent attachées au fond du cristallisoir. On laisse refroidir : il y a surfusion de la paratoluidine; on provoque la cristallisation en projetant un petit cristal dans le liquide.

L'emploi de la solution alcoolique n'est pas indispensable à la production du phénomène; toutefois, il semble que l'alcool favorise l'apparition et la stabilité des cristaux les plus minces, présentant les teintes des deuxième et troisième ordres; l'alcool, qui dissout la paratoluidine semble retarder l'épaississement des cristaux. Dans les solutions plus riches en alcool les cristaux se détruisent trop vite. Le taux le plus favorable me paraît être de 15 pour 100 d'alcool.

L'aspect de la cristallisation dépend aussi du degré de surfusion atteint. Généralement, quand la surfusion est faible (10°) la cristallisation est confuse; de petits cristaux apparaissent dans tout le liquide, et la surface se recouvre d'une croûte cristalline à bords irréguliers. Si l'on perce la croûte et qu'on observe la surface au microscope pendant le refroidissement, on voit des cristaux se former et évoluer rapidement. Comme l'a observé René Marcelin, ils se développent non pas en profondeur, mais en surface, par alluvions successives. On voit des bandes présentant toutes

les colorations de l'échelle des teintes, depuis les gris du premier ordre, cheminer les unes derrière les autres en conservant leur coloration bien uniforme; ces bandes sont généralement limitées par des droites parallèles à la petite diagonale du losange.

Pendant ces observations il est bon de chauffer l'objectif au moyen d'une petite résistance électrique pour empêcher la formation de buée sur la lentille frontale.

Le degré de surfusion le plus favorable aux observations dont il s'agit ici est de 20 à 25° : les gouttelettes se solidifient en masses compactes; de petits cristaux s'en détachent et s'élèvent à travers le liquide; certains d'entre eux atteignent la surface où ils évoluent en général lentement. On a pu conserver certains cristaux pendant 24 heures en protégeant le cristallisoir par un manchon de verre. On les voit ensuite se détruire peu à peu, en surface, comme ils se forment. Dans ce cas, les cristaux sont en général des losanges entiers; quand la surfusion n'est que d'une dizaine de degrés, les losanges sont souvent fortement tronqués.

J'ai essayé d'obtenir des cristaux en lames minces avec d'autres corps. Par le même procédé de cristallisation, seule parmi les corps essayés, la β-naphtylamine a donné des résultats intéressants : même forme cristalline et mêmes aspects que pour la paratoluidine.

On peut obtenir des cristaux minces de diphénylamine par un autre procédé : on dissout ce corps dans l'alcool, on prend quelques gouttes de la solution que l'on étend d'un grand excès d'eau : par précipitation il se forme des petits cristaux carrés avec troncature des 4 angles. Certains ont des plages colorées uniformes séparées par les diagonales ou des droites parallèles aux côtés du carré. Les cristaux que l'on peut observer à la surface évoluent très vite.

MAGNÉTISME. — *Sur une méthode de discussion des moments magnétiques des alliages et la commune mesure des moments atomiques.* Note (1) de M. **R. Forrer**, transmise par M. Pierre Weiss.

Dans les alliages ferromagnétiques le moment atomique moyen (saturation absolue divisée par le nombre des atomes présents et par le magnéton : 1125,6) varie souvent linéairement avec le titre atomique.

---

(1) Séance du 26 mai 1930.

Si deux métaux se mélangent et si leurs atomes portent des moments fixes, on s'attend à une variation linéaire dans tout l'intervalle des titres de 0 à 1. Mais en réalité, on observe des variations linéaires qui n'occupent qu'une partie de l'intervalle. On pourrait les interpréter comme résultant des mélanges de deux groupements (par exemple de combinaisons définies) dont chacun porterait un moment fixe.

Il est peut-être préférable d'adopter un langage différent. Remplaçons dans un alliage de titre x_1 un certain nombre d'atomes A de moment m par des atomes B de moment n et admettons que les autres atomes présents dans l'alliage gardent leur moment. Il en résultera une variation linéaire du moment atomique moyen qui s'étend à tout l'intervalle où la substitution a le même caractère.

On peut généraliser ce « principe de substitution » en admettant que la substitution peut, dans certains cas, être accompagnée d'un changement du moment d'un atome voisin de celui qui est substitué. Tant que ce régime dure, la variation du moment moyen sera encore proportionnelle au changement du titre du métal introduit.

Cette interprétation laisse en général place à plusieurs hypothèses sur les moments élémentaires présents dans l'alliage et l'on devra chercher à résoudre cette indétermination pour chaque système de deux métaux. Mais, dans toute sa généralité, elle suggère un contrôle expérimental de la commune mesure des moments.

Si tous les moments, tant ceux des métaux purs que ceux qui sont altérés par le mécanisme que nous avons supposé, sont des nombres entiers de magnétons, il en résultera que l'effet global de la substitution d'un atome étranger à un atome du métal produira aussi un changement d'un nombre entier ΔM de magnétons.

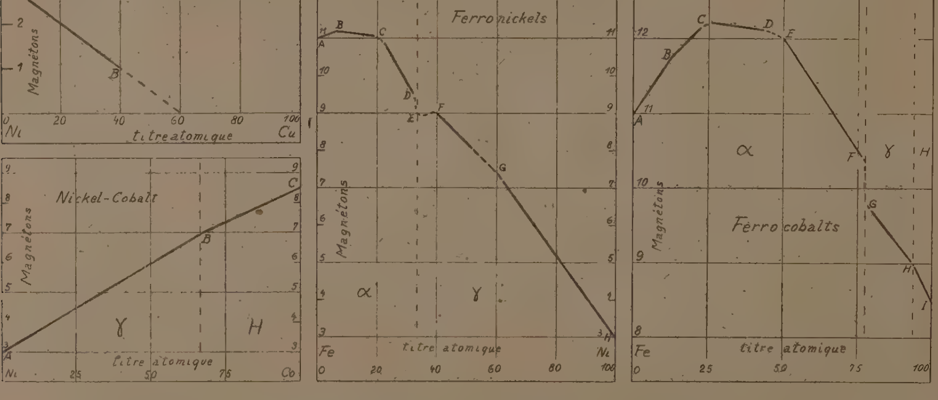
Si p est le nombre des atomes présents, l'altération du moment moyen par la substitution d'un atome sera $\Delta M/p$. Mais puisque le changement de titre du métal introduit est $1/p$, il s'ensuit que la pente de la droite des moments moyens en fonction du titre est ΔM. Elle mesure la variation du nombre de magnétons par atome substitué.

Dans les figures on a représenté les moments atomiques moyens exprimés en magnétons de Weiss, en fonction du titre pour les alliages

Ni-Cu, Ni-Co, Fe-Ni, Fe-Co.

Les pentes ΔM relevées sur les figures sont reproduites dans le tableau :

Alliage.	Droite.	Comprise entre	Grandeur de l'intervalle. des titres.	ΔM.	Nombre rond voisin.
Ni-Cu	A-B	10-40 %	**40**	**5,04**	5
Ni-Co γ	A-B	0-60	**60**	**5,94**	6
Ni-Co H	B-C	70-100	30	4,63	4,5
Fe-Ni α	A-B	0-5	5	3,1	3
»	B-C	6-15	9	0,96	1
»	C-D	24-30	6	14,1	14
Fe-Ni γ	F-G	41-49	8	8,08	8
»	G-H	66-100	**34**	**11,00**	11
Fe-Co α	A-B	0-10	10	5,86	6
»	B-C	13-22	9	4,06	4
»	C-D	27-43	16	0,53	0,5 ou 0,67 (¹)
»	E-F	50-75	25	5,8	6
Fe-Co γ	G-H	81-92	11	4,80	5



La précision de la détermination de ΔM dépend de la grandeur de l'intervalle de variation linéaire et de l'exactitude avec laquelle les points observés se placent sur les droites. Les trois valeurs en caractères gras : 5,04 pour les Ni-Cu (A-B), 5,94 pour les Ni-Co (A-B) et 11,00 pour les Fe-Ni (G-H) sont bien déterminées et sont avec une bonne précision des multiples entiers du magnéton de Weiss.

Les autres pentes sont moins bien déterminées surtout à cause de la

(¹) L'un et l'autre compatibles avec l'expérience.

petitesse des intervalles. Mais dans ces intervalles il y a suffisamment de points pour affirmer le caractère rectiligne. Elles donnent en général, au degré de précision de l'expérience, des multiples entiers du magnéton. Il n'y a que deux exceptions, Ni-Co (B-C) et Fe-Co (C-D), qui d'ailleurs peuvent aisément être interprétées sans invoquer des nombres fractionnaires pour les atomes eux-mêmes.

Ces données pour la détermination de la commune mesure des moments sont indépendantes de celles que fournit la saturation absolue des métaux purs et des combinaisons aux basses températures. Elles ne dépendent pas, comme les moments déterminés à partir de la constante de Curie, du mode de calcul adopté (formules classiques ou quantiques).

Ici comme ailleurs la prédominance du sous-multiple 5 du magnéton de Bohr reste à expliquer.

MICROSCOPIE. — *Réalisation de la microradiographie intégrale.* Note de M. A. **Dauvillier**, présentée par M. Ch. Fabry.

La radiographie des objets microscopiques se heurtait jusqu'à ce jour à des difficultés insurmontables. M. Goby [1], utilisant des rayons X usuels et des plaques du commerce à grains fins, n'avait pu dépasser, dans ses radiographies d'insectes, des grossissements de quelques dizaines de diamètres.

Nous avons réussi à obtenir des images de coupes microscopiques supportant les plus forts grossissements réalisables.

Pour obtenir de telles images, il est nécessaire d'utiliser des émulsions colloïdales comme celles de Taupenot ou de Goldberg. Encore le développement y fait-il apparaître un grain visible au microscope. Nous avons employé les plaques imaginées par Lippmann pour la photographie interférentielle en les préparant selon la technique à l'argent colloïdal décrite par MM. de Watteville et Leroy. Ces émulsions sont environ mille fois moins sensibles aux rayons X que les plaques du commerce à gros grains.

Nous avons observé qu'au contraire elles étaient notablement plus sensibles au noircissement direct. C'est ainsi qu'une coloration pourpre intense est instantanément obtenue en appliquant la couche sensible sur la fenêtre (Al : 5^{μ}) d'un tube de Lenard en fonctionnement (1 mA, 50 kV).

---

(1) *Comptes rendus*, 156, 1923, p. 686, et 180, 1925, p. 735.

Ceci suggère une méthode de microradiographie, applicable aux coupes très minces, et donnant des images instantanées avec des électrons pénétrants. Cependant, avec les coupes microscopiques usuelles, il est de beaucoup préférable d'utiliser des rayons X mous, entièrement absorbables dans l'émulsion qui permettent une bien meilleure différenciation des éléments chimiques existant dans la préparation.

L'appareil est identique à celui présenté l'an dernier à l'exposition de la Société française de Physique et destiné à l'analyse cristalline. Il comporte



un corps anodique métallique à anticathode interchangeable, muni de quatre limitateurs à ouvertures variables, obturées par des fenêtres d'aluminium de 5^{μ}, raccordés à autant de boîtes étanches contenant les plaques. Ces boîtes sont évacuées ou parcourues par un courant d'hydrogène. Un foyer ponctuel central est obtenu au moyen d'une cathode Coolidge. Le tube demeure toujours évacué, mais le vide y est entretenu durant son fonctionnement par une pompe à diffusion à vapeur d'huile. La tension appliquée a varié entre 3 et 8 kV. Avec une anticathode de tungstène et un débit de 0,1 ampère sous 7 kV, la durée de pose n'excède pas deux heures. Les clichés sont renforcés à l'argent pour obtenir des densités photographiques supportant les forts grossissements.

La préparation microscopique, d'une épaisseur de quelques microns, est

collée sur l'émulsion comme elle l'est, en technique microscopique usuelle, sur la lame porte-objet, puis décollée avant le développement. La diffusion, la diffraction, la fluorescence, les trajectoires photo-électriques n'altèrent pas la netteté de l'image. C'est ainsi que les cloisons cellulaires d'une coupe de moelle de sureau (épaisseur : 1 à 2$^{\mu}$) apparaissent aux forts grossissements (par exemple 600) avec une netteté parfaite, comme le montre la microphotographie ci-contre, exécutée par M. J. Bertrand, que nous avons l'honneur de présenter à l'Académie. Le grain, quoique sensible, est indiscernable et n'est pas gênant.

Les applications de la méthode sont aussi nombreuses que celles du microscope lui-même lorsqu'on examine les objets par transparence. Les colorants sont ici remplacés par des éléments minéraux se fixant électivement. Avec les rayons mous employés, l'oxygène apparaît déjà beaucoup plus absorbant que le carbone, et quelques centièmes de soufre dans une coupe organique la rendent opaque. L'étude histologique des cellules normales ou pathologiques pratiquée selon cette méthode décèlera sans doute leur squelette minéral.

La radiographie des protozoaires, des microbes, etc. renseignera sur leur structure. La méthode est applicable à l'étude des végétaux, des textiles naturels et artificiels et à de nombreuses identifications. Elle marque enfin le premier stade de la solution du problème de l'extension du pouvoir grossissant du microscope par substitution des rayons X à la lumière.

RADIOACTIVITÉ. — *Sur la vie moyenne de l'ionium.*
Note [1] de Mme **Pierre Curie** et Mme **S. Cotelle.**

La première méthode employée pour déterminer la vie moyenne Θ_1 de l'ionium est celle de F. Soddy utilisant la vitesse d'accroissement de la teneur en radium dans un composé d'urane soigneusement purifié et exempt à l'origine des mesures, tant d'ionium que de radium. Cette méthode suppose la connaissance de la vie moyenne Θ_2 du radium et du rapport radium/uranium à l'état d'équilibre radioactif. Adoptant $\Theta_2 = 2375$ ans et $Ra/U = 3{,}4 \times 10^{-7}$, Soddy et Hitchins ont admis $\Theta_1 = 110000$ ans [2]. Une autre méthode a été utilisée par St. Meyer [3] qui a mesuré le rayon-

(1) Séance du 26 mai 1930.
(2) Soddy et Hitchins, *Phil. Mag.*, 47, 1924, p. 1148.
(3) St. Meyer, E. Schweidler, *Radioaktivität*, 1927, p. 389-390.

nement α total de couches très minces pour un mélange d'oxydes d'ionium et de thorium; le poids atomique moyen du mélange isotopique Io-Th contenu dans ces oxydes ainsi que celui de Th ont été déterminés par O. Honigschmid et S. Horovitz [1]; la précision de ces expériences était évaluée à 0,0135 unité et les nombres obtenus ont été 232,12 pour Th et 231,51 pour le mélange Io-Th provenant de la pechblende de Jachymov (St. Joachimsthal). Admettant pour Io la valeur 230 obtenue par addition de 4 unités au poids atomique de Ra, on trouve pour la proportion atomique de Io dans ce mélange $x = 0,61/2,12 = 0,2877$. Admettant $\Theta_2 = 2280$ ans, St. Meyer a déduit de ses expériences la valeur $\Theta_1 = 130000$ ans, comme limite supérieure pour la vie moyenne de Io.

Grâce à l'obligeance de M. St. Meyer, à qui nous adressons tous nos remerciements, nous avons pu disposer d'une petite quantité de ce même oxyde Io-Th et nous avons étudié la production de radium dans cette matière. Soient Q la quantité d'ionium et q la quantité de radium formée en un an; la quantité d'ionium détruite dans le même temps est $230\,q/226$; on a $\lambda_1 = 1/\Theta_1 = 230\,q/226\,Q$ an^{-1} et la période T_1 ou temps de destruction de moitié est $T_1 = \mathrm{Log}_e 2/\lambda_1$. Cette méthode ne fait intervenir, outre le dosage du radium produit, que la connaissance des poids atomiques de l'ionium, du thorium et du mélange Io-Th utilisé.

Nous avons constitué avec le mélange Io-Th une solution nitrique peu acide conservée dans un flacon de pyrex à bouchon rodé pesé d'abord vide, puis avec son contenu. Sur cette solution il a été fait deux prélèvements de liquide contrôlés par des pesées; la première portion a été introduite dans un barboteur de type usuel servant au dosage de radium par la mesure du radon dégagé; la deuxième portion évaporée à sec dans un creuset de quartz et chauffée jusqu'à conversion en oxyde a servi pour déterminer le poids d'oxyde contenu dans un poids donné de solution. De ces pesées on déduit que le barboteur contient $0^g,1001$ d'oxyde ce qui correspond à $Q = 0^g,02515$ d'ionium.

L'ionium étant un corps à vie longue, la production de radium reste pratiquement constante pendant plusieurs années; il en est de même de la vitesse d'accroissement du radium, si la quantité de celui-ci reste assez faible pour qu'on puisse négliger sa vitesse de destruction. Ces conditions étant remplies dans le cas actuel, on peut appliquer au problème un calcul simplifié, dont voici le résultat : si la solution à l'étude a été purgée de

(1) O. Honigschmid et S. Horovitz, *Wien. Ber.*, 125, 1916, p. 179.

radon et ensuite abandonnée en vase clos pendant un temps t, *temps d'accumulation*, la quantité de radon accumulée pendant ce temps dans la solution, mesurée en curies est $q_0(1-e^{-\lambda t})+pt\left(1-\frac{1-e^{-\lambda t}}{\lambda t}\right)$ où q_0 est la quantité de radium en grammes présente dans la solution au début du temps t, p celle qui y est produite par unité de temps et λ la constante radioactive de radon. Le radon accumulé étant en totalité extrait de la solution et transporté dans une chambre d'ionisation, soit i l'intensité du courant de saturation mesurée trois heures après l'introduction du radon, quand celui-ci est en équilibre avec son dépôt actif. Soit, d'autre part, J la valeur du courant de saturation par curie de radon telle qu'elle résulte de l'étalonnage de la chambre. On aura

$$q_0(1-e^{-\lambda t})+pt\left(1-\frac{1-e^{-\lambda t}}{\lambda t}\right)=\frac{i}{J}.$$

Par une succession d'opérations semblables, on obtient une série d'équations permettant de déterminer les valeurs les plus probables de q_0 et de p.

Le dosage du radon dégagé a été exécuté par la méthode de barbotage à froid établie par l'une de nous et devenue d'usage courant à l'Institut du Radium (¹) pour les dosages de radium. Pour la chambre employée, $J=3,47\times10^6$ unités E. S., le courant était ramené à une densité d'air dans la chambre correspondant à la pression normale et à la température de 15°. Il a été fait sur la solution 17 expériences successives d'accumulation et d'extraction de radon comprenant un temps total de 768 jours. L'accroissement moyen régulier de radium déduit de ces expériences est $5,703\times10^{-10}$ gr Ra/jour. D'après cela, la quantité d'ionium détruite par an est $2,118\times10^{-7}$ gr et par conséquent

$$\lambda_1=\frac{2,118\times10^{-7}}{0,02515}=8,43\times10^{-6}\,\text{an}^{-1},$$

$$\Theta_1=119000 \text{ ans},\qquad T_1=82300 \text{ ans}.$$

Ce nombre est intermédiaire entre ceux de F. Soddy et de St. Meyer. Nous croyons que l'erreur sur la production de radium n'atteint pas 3 pour 100 et que les erreurs sur les pesées sont négligeables. Par contre, une faible erreur sur l'un des poids atomiques peut se traduire par un écart notable sur Θ_1, provenant principalement de l'évaluation de la proportion x.

(¹) Mme P. Curie, *Le Radium*, 7, 1910, p. 65; *Traité de Radioactivité*, Paris, 1910, p. 283.

Attribuant aux erreurs absolues respectives sur les poids atomiques de Ra, Th et IoTh la minime valeur $\pm 0{,}01$, on trouve que dans le cas le plus défavorable au point de vue des signes, l'erreur sur Θ_1 atteindrait 3 pour 100. Ainsi les résultats de la méthode que nous avons employée dépendent essentiellement de la précision qu'il est possible d'obtenir sur les poids atomiques utilisés. Les autres méthodes signalées font intervenir d'autres données et il y a là une possibilité de contrôle réciproque des résultats obtenus.

RADIOACTIVITÉ. — *Rayonnements associés à l'émission des rayons α du polonium*. Note de M. **F. Joliot** et Mme **Irène Curie**, présentée par M. Jean Perrin.

Nous avons montré (¹) que le rayonnement absorbable qui accompagne les rayons α émis par les sources de polonium dans l'air est principalement dû aux rayons H de transmutation de l'azote. La source préparée par électrolyse étant placée dans le gaz carbonique, nous avons observé une forte diminution du courant d'ionisation; il subsistait, cependant, un résidu de rayons H ayant un parcours analogue à celui des rayons H naturels, probablement dû à l'hydrogène et à la vapeur d'eau occlus dans le support.

Nous avons repris ces expériences en employant des sources de polonium plus intenses préparées par volatilisation (²) sur des supports de différents métaux préalablement dégazés. Ce procédé de préparation a pour principal avantage de diminuer notablement le résidu de rayons H naturels, ce qui facilite l'analyse du rayonnement restant.

Le dispositif de recherche employé a déjà été décrit (¹). La chambre d'ionisation de l'électroscope a été remplie d'argon pour l'étude du rayonnement relativement pénétrant. La polonium a été déposé sur du nickel, du cuivre et du zirconium et l'intensité des sources correspondait à des courants de saturation (rapportés à l'angle 2π) de 35000 à 50000 U.E.S. sur des surfaces de 12 à 20^{mm^2}.

L'étude de l'absorption dans l'aluminium et dans la cellophane des rayonnements émis nous a fourni les résultats suivants :

1° Avec les sources préparées sur nickel et sur cuivre, on observe un

(¹) I. Curie et F. Joliot, *Comptes rendus*, 189, 1929, p. 1270.
(²) E. Rôna et E. W. Schmidt, *Wien Ber.*, 137, 1928, p. 103.

rayonnement X très absorbable de coefficient d'absorption massique dans l'aluminium $\frac{\mu}{\rho} = 1000$ [1]. Ce rayonnement ne peut pas être interprété comme étant la radiation L du cuivre ou du nickel, car son absorption dans la cellophane est plus faible que dans l'aluminium à masse par centimètre carré égale, or la radiation L du cuivre ou du nickel a une longueur d'onde supérieure à celle de la discontinuité d'absorption K de l'aluminium. On observe aussi un rayonnement complexe composé en majeure partie de la radiation caractéristique K du nickel ou du cuivre, et d'un rayonnement plus pénétrant. Pour étudier celui-ci plus commodément, nous avons choisi le zirconium comme support de source, ce métal ayant un rayonnement caractéristique K de coefficient d'absorption très différent.

2. Le rayonnement plus pénétrant émis par les sources sur zirconium se compose d'un rayonnement de coefficient $\left(\frac{\mu}{\rho}\right)_{Al} = 17$ identifiable avec L du polonium et d'un rayonnement notablement plus pénétrant d'intensité trop faible pour permettre une détermination de son coefficient d'absorption. On observe, en outre, avec netteté la radiation L du zirconium et la radiation très absorbable de $\left(\frac{\mu}{\rho}\right)_{Al} = 1000$ que nous signalons dans ce qui précède. Ce rayonnement, qui est indépendant du support, est vraisemblablement la radiation caractéristique M du polonium.

Sur le conseil de M. Holweck, nous avons étudié l'absorption, dans le fer et dans le nickel, du rayonnement attribué à la radiation K du cuivre dont la longueur d'onde est comprise entre celle des discontinuités K du fer et du nickel. Le fer devait être beaucoup plus absorbant que le nickel à masses superficielles égales. C'est ce que l'expérience confirme nettement. De plus, les masses des écrans de fer et de nickel augmentant, la radiation K du cuivre est de plus en plus absorbée et l'écart d'absorption des deux écrans diminue. Ce fait indique la présence d'un rayonnement plus dur, vraisemblablement L du polonium, déjà caractérisé avec la source sur zirconium.

En tenant compte de la fraction du rayonnement utilisée dans l'électroscope, nous avons calculé l'ordre de grandeur des rendements d'excitation.

---

(1) Russell et Chadwick avaient observé un rayonnement de $\left(\frac{\mu}{\rho}\right)_{Al} = 1300$ qu'ils attribuaient à L du cuivre (*Phil. Mag.*, 27, 1919, p. 112).

M de Po, 15 quanta; L de Po, 4 quanta; L de Ag, 100 quanta [1]; L de Zr, 50 quanta; K de Ni ou Cu, 9 quanta pour 10^4 particules α.

Malgré la complexité du rayonnement émis par ces sources, nous avons pu observer l'excitation des rayonnements caractéristiques très absorbables par l'interposition de couches extrêmement minces d'argent ou de bismuth préparées par pulvérisation cathodique (L de Ag, M de Bi).

Les ordres de grandeur des rendements d'excitation des radiations M et L du polonium sont faibles et semblent dépendre de la densité d'activité; cette appréciation est d'ailleurs délicate à cause de la petite quantité de rayons H naturels toujours présente et variable d'une source à l'autre. Il y a cependant lieu de croire que ces radiations ne sont, en général, pas émises par l'atome désintégré, mais par un effet secondaire sur les autres atomes de polonium.

Les expériences montrent que le rendement d'excitation des radiations caractéristiques d'un atome par une particule α augmente lorsque l'énergie du niveau diminue. On n'a pas constaté de fond continu appréciable dans le domaine des longueurs d'onde étudiées.

Les sources de polonium émettent un rayonnement β très faible, moins pénétrant que celui du Ra E.

Nous n'avons pas observé de rayonnement γ nucléaire attribuable au polonium et nos expériences ne nous permettent pas d'affirmer l'existence de rayonnements excités dans les orbites de l'atome désintégré au moment de l'émission de la particule α.

RADIOACTIVITÉ. — *Activation de la matière par l'aigrette.* Note [2] de MM. G. **Reboul** et G. **Déchène**, présentée par M. Cotton.

Dans des Notes précédentes l'un de nous a indiqué [3] que des lames métalliques, placées dans le voisinage de cellules de résistance en fonctionnement, acquièrent la propriété de décharger l'électroscope et d'impressionner la plaque photographique. Une étude préliminaire a montré que cette activité semblait provenir du milieu environnant les appareils et se fixait sur la plaque de métal par un mécanisme analogue à celui par lequel

(1) I. Curie et F. Joliot, *Comptes rendus*, 189, 1929, p. 1270.

(2) Séance du 26 mai 1930.

(3) *Comptes rendus*, 189, 1929, p. 1256, et 190, 1930, p. 374.

l'aigrette précipite sur des lames métalliques les dépôts actifs des émanations radioactives; nous nous sommes proposés de rechercher l'origine de ces émanations.

I. En remplaçant les cellules par des aigrettes produites, suivant le cas, sous des tensions variant de 20000 à 100000 volts, on constate que les lames métalliques s'activent facilement et l'on peut leur communiquer une activité mesurable à l'électromètre et persistant pendant 24, 48 et même 72 heures; en suivant la diminution de l'activité en fonction du temps et en appliquant la méthode indiquée par Curie [1], on peut identifier les substances actives.

La courbe donnée par l'expérience pendant les premières heures de la désactivation correspond à la superposition de trois exponentielles de périodes : 3 minutes (radium A), 27 minutes (radium B) et 20 minutes (radium C). Au bout de quelques heures, alors que les trois exponentielles qui représentent au début l'intensité du rayonnement ont une valeur négligeable, il reste une activité qui décroît avec une période de 10,6 heures (thorium A).

L'activité obtenue semble donc due à des dépôts actifs provenant de la désintégration des émanations du radium et du thorium.

II. Nous avons essayé de chercher l'origine de cette radioactivité, qui paraît être d'une intensité anormale dans les locaux où fonctionnent nos appareils; dans ce but nous avons fait des expériences d'activation par l'aigrette dans diverses salles du Laboratoire de Physique de la Faculté des Sciences de Montpellier. Nous avons trouvé pour l'activité les valeurs moyennes suivantes : dans une salle du deuxième étage 30, au rez-de-chaussée 150 dans une salle et 70 dans l'autre, enfin dans trois salles du sous-sol, on a obtenu 20, 20 et 15. Les deux salles du rez-de-chaussée pour lesquelles l'intensité est la plus grande n'ont été aménagées que depuis deux ans et n'avaient jamais été utilisées auparavant comme laboratoires, la première a abrité pendant plus de vingt ans la batterie d'accumulateurs du laboratoire, l'autre servait de dépôt de matériel, il paraît peu vraisemblable qu'on y ait manipulé des sels radioactifs; d'autre part, on ne peut soutenir que l'activité est d'origine purement atmosphérique ou géologique.

III. Les salles du rez-de-chaussée sont celles où nous faisons fonctionner depuis deux ans les appareils de haute tension et nos cellules de résistance, de sorte que l'on peut se demander si ce fonctionnement n'intervient pas

---

(1) Mme Curie, *Traité de Radioactivité*, 2, p. 303.

dans l'effet précédent; nous avons répété les expériences d'activation de lames par des cellules en plaçant celles-ci en vase clos; dans ces conditions l'activité des lames mesurée à l'électromètre diminue considérablement, sans disparaître tout à fait, mais l'action photographique, notamment avec des feuilles de papier, reste très nette, et l'on ne peut dans ce cas faire intervenir l'activité de l'atmosphère environnante.

CHIMIE PHYSIQUE. — *Étude manométrique et spectrographique de la dissociation thermique de la pyrite* FeS^2. Note de M. **Louis D'Or**, présentée par M. G. Urbain.

Les résultats antérieurs relatifs à la dissociation thermique de la pyrite (Schubert, 1910; Allen et Lombart, 1917; Kamura, 1921) ayant été obtenus par des méthodes qui inspirent peu de confiance, nous avons repris l'étude de la question par une méthode mieux appropriée.

Nos échantillons de pyrite, choisis aussi exempts que possible d'impuretés, sont enfermés dans un appareil entièrement en quartz, comprenant :

1° un récipient de faible capacité, pour la substance elle-même;

2° deux tubes cylindriques fermés aux extrémités par des fenêtres plan-parallèles polies permettant de photographier le spectre d'absorption de la vapeur de soufre en équilibre avec la pyrite, les épaisseurs sont égales à 5 et 50^{mm};

3° un manomètre spiral (manomètre holostérique).

Ces trois parties, accolées les unes aux autres, communiquent entre elles.

Tout l'appareil trouve place dans un four électrique à résistances, conçu de manière à obtenir une répartition suffisamment uniforme de la température.

La dissociation est étudiée sous un vide de moins de 10^{-4} mm/Hg.

A chaque température, on peut ainsi obtenir le spectre d'absorption de la vapeur de soufre en équilibre avec la pyrite, et mesurer la tension totale de dissociation (par compensation).

Une étude spectrographique préliminaire a montré qu'à toute température il s'établit bien un équilibre entre la vapeur de soufre, la pyrite et le sulfure produit par la décomposition et que l'évolution du système avec la température est réversible.

Le spectre de la vapeur de soufre du système « pyrite-soufre » en équilibre, photographié sous une épaisseur de 5^{mm} avec un spectographe Hilger E_2

et l'étincelle sous l'eau entre électrodes d'aluminium comme source de lumière (méthode de V. Henri) présente successivement les aspects suivants :

En dessous de 548°, aucune absorption perceptible;

Vers 548°, apparition de différents systèmes de bandes compris entre 3550 Å et 2325 Å environ; ces bandes se marquent de plus en plus quand la température croît au point que, vers 685°, l'absorption est pratiquement complète pour les longueurs d'onde inférieures à 3100 Å. Ces bandes sont caractéristiques de S^2 (étude antérieure de M. Victor Henri);

Vers 664°, apparaît vers 3980 Å un nouveau spectre, qui se développe à température croissante et s'étend de 4400 à 3580 Å vers 687°; sa structure révèle une molécule polyatomique; or l'étude thermodynamique indique la présence de S^6 et de S^8 (voir tableau ci-après); M. Victor Henri a montré que ce spectre appartient à S^6.

Les mesures de tension de dissociation, faites sur un premier cristal et vérifiées sur un second d'autre provenance et d'autre faciès, ont confirmé la réversibilité, montré que le sulfure résiduel est FeS et fourni les résultats suivants :

$t°$ C.	Pression totale.	Pression de S^2.	Pression de S^6.	Pression de S^8.
°	mm	mm	mm	mm
548	2,8	2,8	0,001	10^{-5}
586	15	15	0,035	4.10^{-4}
601	30	30	0,14	0,002
604	32	32	0,15	0,0023
619	59,5	59	0,5	0,01
626	79	78	0,7	0,015
637	121	119	1,95	0,057
646	171,5	167,5	3,75	0,13
654	230,5	223,5	6,65	0,25
664,5	349	333,5	14,8	0,7
671	436	413	22	1,15
676	540	504,5	33,5	2,0

d'où l'équation thermochimique de décomposition

$$2\,FeS^2 \rightarrow 2\,FeS + S^2 - 61\,000^{cal}$$

(en moyenne et sans travail extérieur). Tandis que l'énergie de fixation du premier atome de soufre est $90\,500^{cal}$ (FeS), celle du second est de 82500 environ.

La formule approchée suivante rend assez fidèlement les résultats expérimentaux :

Tension partielle de S^2 (p en millimètres Hg) :

$$\log p = 14,964 \frac{T - 892}{T} + \log T + \bar{2},8205.$$

Les tensions de S^6 et S^8 se déduisent aisément de celle de S^2.

Le produit de la réaction de recomposition au refroidissement présente bien les caractères de la pyrite (au microscope : aspect cristallin, couleur et éclat; passivité à l'égard de HCl concentré).

CHIMIE PHYSIQUE. — *Constitution chimique et effet Raman : la liaison acétylénique.* Note de MM. **M. Bourguel** et **P. Daure**, présentée par M. G. Urbain.

L'étude de l'effet Raman produit par un certain nombre de composés acétyléniques mono- ou bisubstitués nous a conduits aux résultats suivants :

La triple liaison $-C \equiv C-$ dans une molécule organique se signale par une ou quelquefois deux raies caractéristiques. Chaque fois qu'il s'agit d'un composé mono-substitué $R-C \equiv CH$ (carbures ou alcool) la raie est unique et sa fréquence Raman est 2110-2120 (nombre d'ondes au centimètre). Les composés bisubstitués $R-C \equiv C-R'$ nous ont donné tantôt une, tantôt deux raies très voisines dont les fréquences sont comprises entre 2200 et 2300; le remplacement de l'hydrogène par un des groupements CH^3, Cl, CO^2CH^3 augmente donc la fréquence caractéristique de la triple liaison. Ces raies sont toujours très fortes, elles se placent dans une région où l'on n'avait pas encore signalé de raies chez les carbures, elles sont donc isolées et, par cela même, très faciles à reconnaître.

La fréquence correspondante de l'acétylène avait été trouvée par l'un de nous [1] égale à 1960; ce résultat confirme ce que nous avons dit plus haut sur l'influence des substitutions; puisque, dans l'acétylène, les atomes de carbone ne portent que de l'hydrogène, la fréquence doit être plus faible.

En outre les composés acétyléniques vrais possèdent une raie caractéristique de la liaison $\equiv C-H$ qui se place aux environs de 3310; son intensité est toujours très faible. L'acétylène possède aussi cette raie (3320).

Voici le tableau des corps étudiés; leurs spectres Raman comportent bien

---

[1] P. Daure, *Annales de Physique*, 12, 1929, p. 375 (acétylène en solution acétonique).

entendu de nombreuses raies dont le détail sera donné dans un Mémoire plus étendu, nous nous bornerons ici aux fréquences qui caractérisent la fonction acétylénique.

Corps.	Liaison —C≡C—.	Liaison ≡C—H ([1]).
$CH^3—(CH^2)^3—C\equiv CH$ (hexine vrai)	2121	3305
$CH^3(CH^2)^4—C\equiv CH$ (heptine vrai)	2118	3310
$CH^3(CH^2)^5—C\equiv CH$ (octine vrai)	2119	3310
$C^6H^5—C\equiv CH$ (phénylacétylène)	2108	3295
$C^6H^5—CH^2—C\equiv CH$ (phénylpropine vrai)	2120	?
$(CH^3)(CH^3)>COH—C\equiv CH$	2120	3305
$CH^3—(CH^2)^4—C\equiv C—CH^3$ β-octine	2210 et 2300	
$CH^3—(CH^2)^4—C\equiv C—CO^2CH^3$ octinoate de méthyle	2240	
$C^6H^5—C\equiv C—CH^3$ β-phénylpropine	2212 et 2250	
$C^6H^5—C\equiv C—Cl$ α-chlorophénylacétylène	2224	

On sait que la liaison saturée est caractérisée par une raie dont la fréquence est voisine de 1450; la liaison éthylénique par une raie comprise entre 1600 et 1700; la liaison éthylénique se place donc au point de vue de l'effet Raman entre la saturée et l'acétylénique, mais on peut remarquer qu'elle est beaucoup plus proche de la première que de la seconde. Ce détail est à rapprocher du fait qu'au point de vue des densités, des indices de réfraction, des réfractions moléculaires, un étylénique est notablement plus proche du saturé que de l'acétylénique correspondant. Le parallélisme s'accentue encore si l'on compare deux isomères acétyléniques, l'un mono, l'autre bisubstitué, à tous les points de vue, indices, densités, effet Raman, le second s'écarte encore plus de l'éthylénique que le premier.

MÉTALLURGIE. — *Méthode et appareil d'essai donnant le coefficient d'extension et la charge de rupture des produits métallurgiques en feuilles.* Note ([2]) de M. **Ch. Jovignot**, présentée par M. Léon Guillet.

Les méthodes et machines employées en vue de déterminer les qualités des métaux en feuilles pour répondre aux exigences des façonnages à supporter et particulièrement de l'emboutissage, d'une part ne fournissent

([1]) Cette raie est faible et diffuse, le pointé en est assez imprécis.

([2]) Séance du 26 mai 1930.

pas tous les renseignements utiles et nécessaires sur la qualité du métal à l'extension dans tous les sens, sur la charge de rupture, sur l'homogénéité du produit, et d'autre part laissent place à une appréciation de résultats s'étendant sur une échelle réduite.

Une nouvelle méthode réalisée par un mécanisme facile à mettre en œuvre permet de déterminer le coefficient d'extension dans tous les sens du métal dit « coefficient d'emboutissage », ainsi que la charge de rupture, d'une manière simple et précise, à l'aide d'apparcils enregistreurs, en même temps qu'elle renseigne sur l'homogénéité du métal.

La machine (*fig.* 1) qui permet de réaliser ces essais est constituée par :

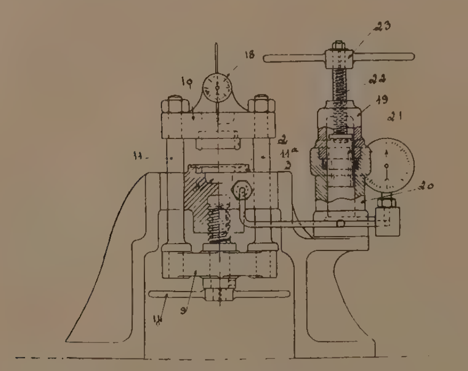


Fig. 1. — Machine à essayer les métaux en feuilles par pression hydraulique.

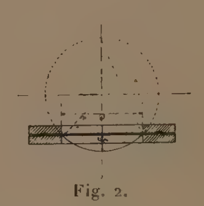


Fig. 2.

1° Un équipage composé des organes 8, 9, 10, 11, 11ᵃ, 14 permettant le serrage énergique entre deux mâchoires circulaires 2 et 3 de l'éprouvette de tôle;

2° Un dispositif hydraulique composé des éléments 19, 20, 21, 22, 23 destiné à donner la pression dans le réservoir 4 placé au-dessous de l'éprouvette; cette pression est enregistrée par un manomètre 25;

3° Un appareil enregistreur des déformations ou flèches du métal à l'essai : 18.

L'éprouvette étant serrée entre les mâchoires, on donne la pression nécessaire jusqu'à rupture de la calotte sphérique (*fig.* 2), indiquée par la chute de pression au manomètre.

L'essai d'extension peut être caractérisé par plusieurs expressions, fonctions de la flèche f de la déformation du métal :

1° Coefficient d'emboutissage dont les variations indiquent l'accroisse-

ment de surface par unité de surface et sont représentées par une parabole de formule $x = \frac{f^2}{\text{const.}}$;

2° Rayon de la calotte sphérique dont les variations de longueur peuvent être représentées par une hyperbole dont l'expression est $r = \frac{c^2 + 4f^2}{8f}$, c étant une constante (diamètre des mâchoires).

Ce rayon permet de calculer la charge de rupture $R = \frac{Pr}{2e}$, P étant la pression et e l'épaisseur du métal.

Un abaque à alignement donne par simple lecture la valeur de cette charge pour les diverses épaisseurs de tôle.

Le tableau comparatif d'essais faits sur feuilles de fer-blanc de diverses épaisseurs $\left(\text{de } \frac{20}{100} \text{ à } \frac{32}{100}\right)$ reproduit ci-dessous fait ressortir les avantages de la méthode.

L'ordre des résultats ne correspond d'ailleurs nullement ici à des épaisseurs de métal croissantes. Le classement a été fait dans l'ordre de croissance des flèches dans les essais selon la méthode.

Méthode par extension.		Méthode de la bille.	Méthode par extension.		Méthode de la bille.
Flèche en millimètres.	Coefficient d'emboutissage.	Flèche en millimètres.	Flèche en millimètres.	Coefficient d'emboutissage.	Flèche en millimètres.
8,2	7,4	5,5	12,3	16,7	5,3
8,7	8,5	4,9	12,5	17,3	6,4
9,6	10,3	5,2	13,1	19,0	7
9,8	10,6	5,6	13,4	19,7	6.6
10,8	12,8	5,2	13,4	19,7	6,8
10,9	13,0	6,0	15	25,0	6,6
11,4	14,0	5,6	15,5	26,6	7,9
11,7	15,5	6,2	15,9	28	7,6
12	16	6,4			

L'examen des épreuves et le tableau d'essai montrent que :

La déformation est bien exactement une calotte sphérique;

L'indication de rupture donnée par le manomètre a lieu alors que l'aspect du métal n'a pas encore permis de discerner cette rupture;

La rupture dans une tôle sans défaut d'homogénéité a lieu au sommet de la calotte, soit suivant une ligne à bords dentelés parallèle aux fibres de laminage, soit suivant deux droites sensiblement à 90° l'une de l'autre issues du sommet de la calotte;

Le coefficient déterminé est le résultat de l'extension dans tous les sens du métal jusqu'à rupture, extension croissant depuis les mâchoires jusqu'au sommet de la calotte sous des efforts croissants dans le même sens;

Les lectures étant faites sur appareils enregistreurs et la chute de pression étant l'indication du défaut ou de la rupture, tout élément d'appréciation étant supprimé, la méthode présente un caractère particulier de précision et de sincérité.

L'échelle des valeurs est très étendue, permettant un classement précis suivant les multiples besoins de l'industrie.

CHIMIE ORGANIQUE. — *Sur le mécanisme de l'action des catalyseurs dans l'autoxydation de l'acide abiétique.* Note [1] de MM. **G. Dupont**, **J. Lévy** et **J. Allard**, présentée par M. G. Urbain.

Nous avons montré [2] que l'oxydation de l'acide abiétique par l'oxygène libre présentait les caractères d'une autoxydation et que de nombreux catalyseurs agissaient les uns négativement, les autres positivement.

Nous allons ici étudier l'action catalytique de l'abiétate de cobalt qui est le plus actif des catalyseurs positifs.

A. *Allure de l'oxydation catalytique.* — Cette étude a été faite avec agitation et à pression constante sur une solution à 50 pour 100 d'acide abiétique catalysée par 0,25 pour 100 de CoO (sous forme d'abiétate). Les résultats sont résumés dans la figure 1.

1° Dans la première partie, l'oxydation a nettement l'allure d'une réaction autocatalysée. La vitesse d'oxydation croît avec le temps, comme dans le cas de l'oxydation directe, mais beaucoup plus rapidement.

2° La vitesse d'absorption atteint un maximum A, puis commence à décroître sensiblement quand il y a un atome de O, fixé par molécule d'acide abiétique. Après une chute assez rapide AB, la courbe des vitesses présente un palier assez allongé, puis tombe à nouveau quand il a été fixé deux atomes d'O. Cette allure se conservant quelle que soit la portion du catalyseur, on peut en conclure que l'acide abiétique A s'oxyde en deux phases successives donnant AO puis AO^2, l'oxydation se poursuivant d'ail-

---

(1) Séance du 26 mai 1930.

(2) *Comptes rendus*, 189, 1929, p. 763 et 920.

leurs lentement au delà. Ces phases empiètent d'ailleurs nettement les unes sur les autres.

B. *Influence de la proportion du catalyseur sur les vitesses d'oxydation.* — Quand on fait décroître progressivement la proportion de catalyseur, on observe ce résultat remarquable que, *pour des proportions suffisamment faibles, le catalyseur agit comme antioxygène.* Les courbes de la figure 2 résument les résultats obtenus à volume constant (tube manométrique) avec diverses proportions de catalyseur.

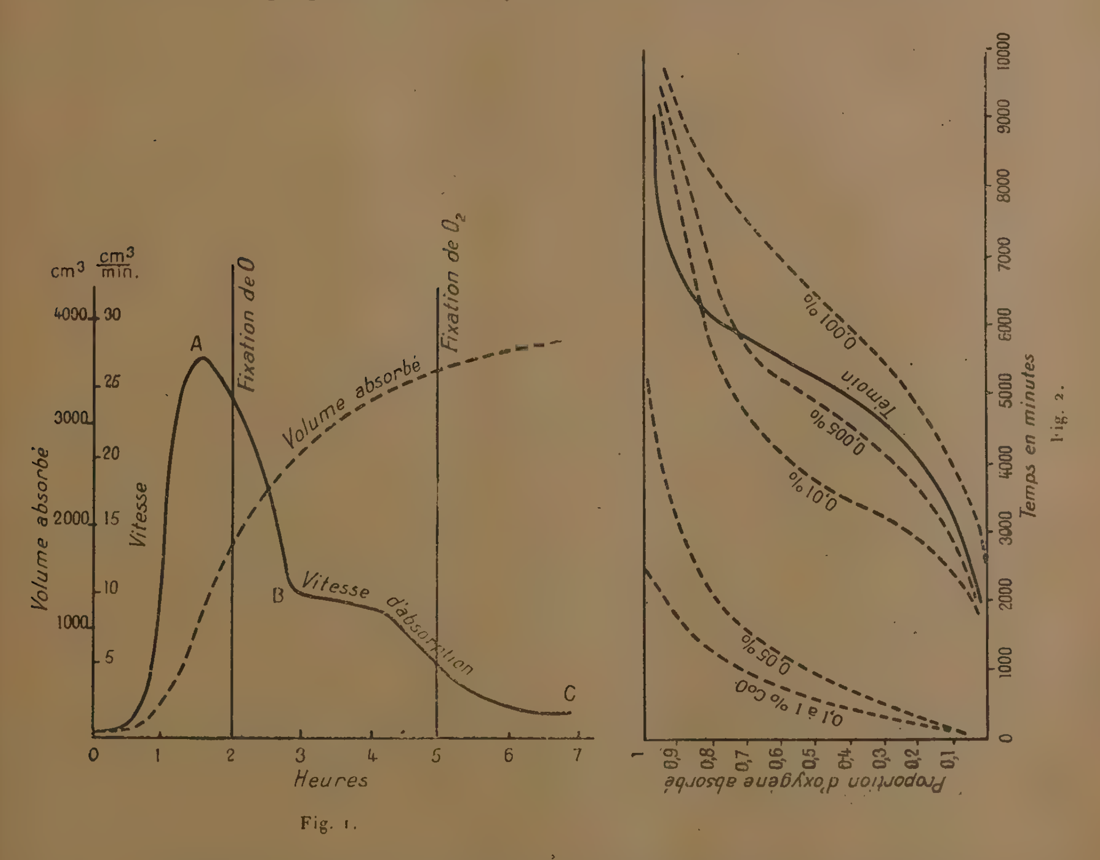


Fig. 1.

Fig. 2.

La vitesse d'absorption est plus rapide qu'avec le témoin (catalyse positive) pour les concentrations supérieures à 0,01 pour 100 de CoO; elle est moins rapide (catalyse négative) pour 0,001 pour 100 de CoO. Pour une

concentration intermédiaire (0,005 pour 100), la catalyse commence par être positive, puis devient négative [1].

C. *Oxydation du catalyseur abiétate de cobalt.* — Pour mieux préciser l'action de l'abiétate de cobalt, nous avons étudié son oxydation propre. Cet abiétate a été préparé par double décomposition. La solution titrant 18 pour 100 d'abiétate et 6,9 pour 100 d'acide abiétique libre s'oxyde avec une extrême lenteur, tandis qu'au contraire les mélanges d'acide abiétique et d'abiétate, en particulier le mélange de 1 molécule d'abiétate neutre et 3 molécules d'acide abiétique s'oxydent très rapidement.

On est donc conduit à penser que ce n'est pas l'abiétate neutre de cobalt qui sert de catalyseur, mais bien un complexe *abiétate de cobalt-acide abiétique*, ou plutôt un complexe *abiétate-acide oxydé.*

Nous avons cherché à vérifier cette hypothèse par l'étude des spectres d'absorption des mélanges acide abiétique-abiétate de cobalt neutre.

La solution xylénique d'abiétate de cobalt, de couleur indigo, présente trois bandes d'absorption, entre 460 et $570^{\mu\mu}$. L'abiétate acide, de couleur violet verdâtre, présente les trois bandes d'absorption précédentes, mais absorbe toutes les radiations moins réfrangibles que $\lambda = 500^{\mu\mu}$.

L'abiétate acide oxydé, de couleur brun verdâtre foncé, ne laisse plus passer que les radiations plus réfrangibles que $560^{\mu\mu}$. L'acide abiétique pur ou oxydé ne présente pas de bandes d'absorption.

Ces résultats nous montrent que, dans l'abiétate acide oxydé, doit exister un complexe très absorbant pour les radiations bleues et violettes. Ce complexe existe déjà en petite quantité, par suite d'une oxydation inévitable, dans l'abiétate acide fraîchement préparé. Nous montrerons, dans une prochaine Note, que ce complexe est le véritable catalyseur d'oxydation dans les réactions que nous avons précédemment étudiées.

---

[1] On peut trouver une explication de ces résultats dans la théorie des antioxygènes donnée par MM. Moureu et Dufraisse : action réciproque de deux peroxydes antagonistes; l'oxyde actif AO de l'acide abiétique et celui du catalyseur.

CHIMIE ORGANIQUE. — *Sur la transformation par isomérisation de la benzylvalérolactone en acide tétrahydrométhylnaphtalène-carbonique.* Note de M. **Georges Darzens**, présentée par M. A. Desgrez.

J'ai montré ([1]) que l'acide benzylallylacétique était susceptible de se cycliser sous l'action de l'acide sulfurique à 78 pour 100, en acide tétrahydrométhylnaphtalène-carbonique, mais que cette réaction était toujours accompagnée de la formation d'une lactone, la benzylvalérolactone, dans la proportion de 50 pour 100.

Au cours de ce travail j'avais cherché si cette lactone ne pouvait pas à son tour être isomérisée en dérivé hydronaphtalénique, suivant la réaction

$$C_6H_5-CH^2-\underset{|\ \ CO}{CH}-CH-\underset{O\ |}{CH}-CH^3 \rightarrow C_{10}H_{10}(CO^2H)(CH^3)$$

Je n'avais pas réussi à réaliser cette transformation, qui aurait permis d'améliorer considérablement l'obtention des dérivés tétrahydrobenzéniques et j'avais conclu que la cyclisation et la lactonisation étaient deux réactions indépendantes qui évoluaient parallèlement.

Reprenant cette question je suis parvenu, à effectuer le passage direct de la lactone à l'acide hydronaphtalénique.

C'est une réaction qui s'effectue avec une extrême lenteur, et c'est cette circonstance qui ne m'avait pas permis de la constater.

Elle se réalise le plus facilement avec de l'acide sulfurique à 64,5 pour 100, répondant sensiblement à la formule $H^2SO^4 3H^2O$ (acide à environ 52° B.).

On chauffe à cet effet, pendant 8 jours, à une température de 120-125°, un mélange de : une partie de lactone et trois parties de l'acide sulfurique susmentionné, le tout étant constamment émulsioné par une agitation mécanique énergique; dans ces conditions la transformation cherchée s'effectue peu à peu, et la lactone liquide se transforme en un produit solide qui n'est pas autre chose que l'acide tétrahydrométhylnaphtalène-carbonique.

([1]) *Comptes rendus*, **183**, 1926, p. 748 et 1110.

Ce dernier s'isole facilement à l'état pur en le dissolvant dans une solution de carbonate de soude qui est épuisée à l'éther pour enlever une petite quantité de lactone non isomérisée, puis en le précipitant à nouveau par un acide minéral.

En tenant compte de la lactone récupérée, le rendement est quantitatif.

Ce procédé d'isomérisation peut s'appliquer directement à l'acide benzylallylacétique qu'il transforme alors presque intégralement en acide hydronaphtalénique, alors que le procédé donné antérieurement, basé sur l'emploi d'un acide sulfurique plus concentré, n'aboutit qu'à un rendement de 50 pour 100.

On peut remarquer que le résultat est obtenu surtout par l'emploi d'un acide moins concentré, ce qui permet une température plus élevée sans craindre une sulfonation qui d'ailleurs ne manquerait également pas de se produire si l'on élevait la température au-dessus de celle indiquée.

Le même procédé d'isomérisation peut s'appliquer à tous les homologues alcoylés de l'acide benzylallylacétique, comme je me propose de le démontrer dans un prochain travail.

CHIMIE ORGANIQUE. — *Action du sélénoxanthydrol sur les β-dicétones et l'acétylacétate d'éthyle.* Note [1] de M. **Félix François**, transmise par M. V. Grignard.

On sait depuis longtemps que les aldéhydes réagissent sur les β-dicétones et les éthers β-cétoniques : il y a élimination d'eau entre l'oxygène aldéhydique et les deux atomes d'hydrogène du groupement $CH^2\langle$ de la molécule méthylénique

$$R-\overset{\displaystyle H}{\overset{|}{C}}=O+\begin{matrix}H\\H\end{matrix}\!\rangle C\langle\!\begin{matrix}CO-R_1\\CO-R_2\end{matrix}=H^2O+R-CH=C\langle\!\begin{matrix}CO-R_1\\CO-R_2\end{matrix}$$

M. Fosse a trouvé [2] que le xanthydrol (diphénopyranol) réagissait également directement sur ces molécules méthyléniques. Il s'élimine de l'eau entre l'oxhydryle alcoolique et l'un des H mobiles du groupement

---

(1) Séance du 26 mai 1930.

(2) R. Fosse, *Bull. Soc. chim.*, Paris, 35, 1906, p. 1005.

$CH^2\langle$: le radical xanthyle se substitue à cet H. Cet alcool pyranique offrait, là, un exemple unique de réaction d'un alcool sur ces corps.

Nous avons montré [1] que le thioxanthydrol se prêtait aux mêmes combinaisons.

Dans un but de généralisation, nous avons soumis, à l'action des β-dicétones et de l'acétylacétate d'éthyle, le sélénoxanthydrol : dans tous les cas il nous a été possible d'obtenir la combinaison attendue.

I. *Cas des β-dicétones.* — La réaction a été effectuée, à la température ordinaire, par simple mélange des solutions dans l'acide acétique des corps réagissants. Les premiers cristaux apparaissent dans le liquide, d'une demi-heure à une heure et demie après le début de l'expérience. La cristallisation augmente alors rapidement avec le temps. Les rendements sont excellents :

$$Se\left\langle\begin{matrix}C^6H^4\\C^6H^4\end{matrix}\right\rangle CHOH + H - CH\left\langle\begin{matrix}CO - R_1\\CO - R_2\end{matrix}\right.$$
$$= H^2O + Se\left\langle\begin{matrix}C^6H^4\\C^6H^4\end{matrix}\right\rangle CH - CH\left\langle\begin{matrix}CO - R_1\\CO - R_2\end{matrix}\right. .$$

Nous avons ainsi préparé :

La sélénoxanthylacétylacétone,

$$Se\left\langle\begin{matrix}C^6H^4\\C^6H^4\end{matrix}\right\rangle CH - CH\left\langle\begin{matrix}CO - CH^3\\CO - CH^3\end{matrix}\right. ,$$

qui se présente en magnifiques houppes cristallines soyeuses, blanches, fondant à 145-146°. Elle est soluble, à chaud, dans l'alcool qui en permet la recristallisation.

La sélénoxanthylbenzoylacétone,

$$Se\left\langle\begin{matrix}C^6H^4\\C^6H^4\end{matrix}\right\rangle CH - CH\left\langle\begin{matrix}CO - CH^3\\CO - C^6H^5\end{matrix}\right. ,$$

sous forme de petits cristaux blancs, grenus, fondant à 136°,5 et solubles dans l'alcool chaud.

II. *Cas de l'acétylacétate d'éthyle.* — La combinaison du sélénoxanthydrol et de l'acétylacétate d'éthyle est obtenue par fusion du mélange des deux composants, maintenu vers 130-135°, jusqu'à départ complet de la

---

(1) F. François, *Thèse Doctorat ès sciences* (Lille, 1929).

vapeur d'eau, ce qui exige une demi-heure à une heure :

$$\mathrm{Se}\left\langle\begin{matrix}C^6H^4\\C^6H^4\end{matrix}\right\rangle \mathrm{CHOH} + \mathrm{H} - \mathrm{CH}\left\langle\begin{matrix}CO - CH^3\\CO^2 - C^2H^5\end{matrix}\right.$$

$$= H^2O + \mathrm{Se}\left\langle\begin{matrix}C^6H^4\\C^6H^4\end{matrix}\right\rangle \mathrm{CH} - \mathrm{CH}\left\langle\begin{matrix}CO - CH^3\\CO^2 - C^2H^5\end{matrix}\right. .$$

Le composé obtenu est purifié par recristallisation dans un mélange, à parties égales, d'alcool absolu et d'éther de pétrole.

Le sélénoxanthylacétylacétate d'éthyle se présente en aiguilles blanches, fondant à 108-110°, solubles dans l'alcool, peu solubles dans l'éther de pétrole.

Ainsi, se trouve généralisée une réaction remarquable du xanthydrol sur les β-dicétones et les éthers β-cétoniques.

La mobilité de l'oxhydryle alcoolique qu'apporte aux alcools en — CHOH —, dans le noyau du diphénopyrane, l'atome d'oxygène du noyau, vis-à-vis des molécules méthyléniques, ne lui est pas exclusive.

Le soufre et le sélénium, ses voisins de la deuxième famille des métalloïdes, la lui communiquent aussi, en se substituant à l'oxygène de ce noyau.

CHIMIE APPLIQUÉE. — *Sur la neutralisation des huiles de ricin.* Note de Mlle **Marie-Thérèse François**, présentée par M. M. Delépine.

L'aviation française consomme de grandes quantités d'huile de ricin pour le graissage des moteurs, en raison de son onctuosité et de sa viscosité remarquables. Cependant, les méthodes industrielles d'extraction ne permettent pas d'obtenir des produits rigoureusement neutres; de plus, avec le temps, quand le stockage est défectueux, l'acidité augmenterait, dit-on, par suite de la présence de ferments lipolytiques qui n'ont pas été complètement détruits au cours de la fabrication. Comme il est de première importance d'utiliser des lubrifiants neutres, on a proposé de nombreux procédés de traitement offrant des avantages particuliers et dont quelques-uns ont fait l'objet de brevets (neutralisation par les lessives alcalines; entraînement des acides gras par la vapeur d'eau; dissolution des acides aliphatiques dans de la pyridine aqueuse; reconstitution des glycérides par estérification avec le glycérol; estérification par l'oxyde d'éthylène; ultra-filtration, etc.).

De récentes publications [1] ont attiré notre attention sur une base organique que les progrès de l'industrie permettent de préparer sur une large échelle et à un prix abordable. La triéthanolamine industrielle résulte de l'action de l'oxyde d'éthylène sur l'ammoniaque, selon les réactions décrites autrefois par Ad. Wurtz [2] :

$$NH^3 + \underset{\diagdown_{O}\diagup}{CH^2 - CH^2} \begin{array}{l} \nearrow NH^2.CH^2.CH^2.OH \\ \rightarrow NH.(CH^2.CH^2.OH)^2 \\ \searrow N.(CH^2.CH^2.OH)^3 \end{array}$$

C'est un liquide visqueux constitué par le mélange des trois amines : primaire (0,5 pour 100); secondaire (20 à 25 pour 100); tertiaire (75 à 80 pour 100), dont les propriétés diffèrent peu d'un terme à l'autre. Il se combine facilement aux acides gras pour donner des savons stables en solution aqueuse et à température relativement élevée; de plus, ces savons sont solubles dans les huiles végétales et minérales.

Des essais entrepris sur des huiles de ricin d'acidités différentes ont établi qu'il est possible de les neutraliser en partie au moyen de triéthanolamine. Les résultats sont limités car le ricinoléate de triéthanolamine possède un pH égal à 6,2. Le mode opératoire est simple : il consiste à déterminer suivant la méthode du cahier des charges l'acidité de la matière première; puis à titrer d'autre part l'alcalinité de l'éthanolamine en utilisant l'*hélianthine* comme indicateur. Il suffit enfin d'agiter pendant quelques instants les quantités correspondantes d'huile et de base, en présence d'un volume d'eau voisin du volume d'huile utilisé. Une partie du savon se dissout dans l'huile, l'autre dans l'eau (d'où on pourra l'extraire par relargage). On décante pour séparer la couche aqueuse; on chauffe au bain-marie pour détruire l'émulsion et on abandonne pendant quelques heures le liquide clair dans une étuve à 100-105° pour chasser toute trace d'humidité. Les résultats trouvés sont consignés dans le tableau suivant :

---

(1) R. B. Trusler, *Ind. and Eng. Chemistry*, **21**, 1929, p. 685-687. — A. L. Wilson. *Ind. and. Eng. Chemistry*, **22**, 1930, p. 143-146.

(2) Ad. Wurtz, *Comptes rendus*, **59**, 1859, p. 898; **53**, 1861, p. 338.

	Cahier des charges.	Huile 1		Huile 2		Huile 3	
		brute.	traitée.	brute.	traitée.	brute.	traitée.
Densité $D_{15^\circ}^{15^\circ}$	0,959-0,967	0,963	0,967	0,960	0,966	0,959	0,966
Indice de réfraction $n_D^{18^\circ}$	1,477 1,490 à 22°	1,4795	1,4805	1,4788	1,4795	1,4785	1,4790
Pouvoir rotatoire spécifique $[\alpha]_D^{18^\circ}$	–	4,33	4,35	4,34	4,35	4,38	4,40
Viscosité absolue à 35°	–	2,90	2,97	2,85	3,09	2,72	2,94
Viscosité absolue à 100°	–	0,162	0,164	0,161	0,168	0,154	0,155
Acidité en acide oléique pour 100	2	1,5	0,7	5	1,6	10	3,2
Indice de saponification	177-186	177	177,1	178,0	180,5	179,5	181,1
Indice d'iode	84- 86	82,4	82,0	82,5	81,9	82,0	80,6
Indice d'acétyle (E. André)	149-151	160,5	159,0	161	162	161	160,5
Cendres	–	0	0	0	0	0	0

L'examen des nombres précédents montre :

1° Qu'il est possible d'abaisser l'acidité des huiles de ricin (de 1,5 à 0,7; de 5 à 1,6; de 10 à 3,2) en les traitant par la quantité théoriquement nécessaire de triéthanolamine industrielle en solution aqueuse; il est à remarquer qu'un excès de base, soluble dans l'huile, n'a aucune influence sur l'acidité déterminée en présence de phtaléine du phénol comme indicateur.

2° Que les huiles partiellement neutralisées possèdent des caractères physiques et chimiques conformes aux conditions exigées par le cahier des charges de l'aéronautique; un traitement peu onéreux pourrait donc faire entrer une huile de seconde pression, dont l'acidité est en général voisine de 5, dans la catégorie des huiles de graissage pour l'aviation.

3° Que la viscosité des produits obtenus semble devoir s'élever.

4° Que si l'huile elle-même ne laisse pas de cendres quand on la brûle, cette méthode de neutralisation n'en introduit pas.

Nous nous proposons de poursuivre ces recherches et de déterminer comment varie avec le temps l'acidité des huiles traitées par une solution aqueuse de triéthanolamine.

MINÉRALOGIE. — *Étude d'un nouveau gisement de calcite mis à jour dans le creusement de la forme-entrée du port de Saint-Nazaire.* Note de MM. **Paul Combes** et **Roger Campredon**.

Au cours des travaux de la nouvelle entrée du port de Saint-Nazaire (¹), nous avons observé, en pleine masse des gneiss, dans une partie mise à jour par le creusement, côté Est, une importante lentille de calcite remarquablement pure, représentant dans sa partie visible, un volume de plusieurs mètres cubes.

Cette calcite est intercalée dans les gneiss à biotite typiques de Saint-Nazaire. Les points de contact avec les gneiss sont arrondis, mamelonnés, et présentent, par endroits, des cristaux superficiels de calcite, de petite dimension, soit complètement isolés, soit noyés dans une pâte de calcaire saccharoïde. En d'autres points de contact, la calcite est grenue, saccharoïde, ou à cristallisation fine et serrée, elle est alors très dure. En s'éloignant de la roche encaissante, la cristallisation devient plus ample et la calcite offre l'aspect d'une roche blanche, nacrée, à facettes cristallines, ou à gros cristaux friables.

Par ces caractères, elle diffère des cipolins signalés dans la région. Elle se distingue notamment des cipolins de Villès-Martin étudiés par M. Alfred Lacroix (¹), lesquels contenaient de nombreux minéraux étrangers phlogopite, orthose, graphite, amphibole, pyrrothine, pyroxène, etc. Les cipolins de la Paclais, en Saint-Malo-de-Guersac, près Saint-Nazaire (²) ne sont pas plus riches en calcite que ceux de Villès-Martin, ils contiennent surtout du pyroxène et de l'amphibole.

Les analyses de la calcite de Saint-Nazaire (R. Campredon) montrent une variation très grande dans les teneurs en carbonate de chaux et en carbonate de magnésie.

Certains échantillons présentent une concentration en carbonate de manganèse tout à fait remarquable. Dans les alvéoles en forme de géode de l'un

---

(¹) Alfred Lacroix, *Contribution à l'étude des gneiss à pyroxène et des roches à wernérites* (*Bull. Soc. Minéralogie*, **12**, 1889, p. 83-364). — *Description des gneiss à pyroxène de la Bretagne et des cipolins qui leur sont associés* (*Bull. Sc. Nat. de l'Ouest*, **1**, 1891, p. 173).

(²) Ch. Barrois et Michel-Lévy, *Feuille Saint-Nazaire*, nº **104**, *de la Carte géologique de France*. Notice 1897.

des blocs, nous avons recueilli une matière pulvérulente rosée contenant 26,41 pour 100 de carbonate de manganèse (analyse E).

Voici le tableau des analyses exécutées :

	A. Grenu.	B. Saccharoïde.	C. Cristallisé compact.	D. Cristallisé friable.	E. Matière rose pulvérulente.
Silice	0,88	0,60	0,78	0,30	0,40
Alumine	0,51	0,41	0,49	0,15	0,22
Oxyde de fer	0,46	0,25	0,23	0,22	0,91
Oxyde de manganèse	0,01	0,04	0,02	0,03	16,30
Chaux	42,35	53,65	49,40	53,85	34,55
Magnésie	10,68	1,36	4,86	1,44	4,86
Anhydride sulfurique	traces	–	–	–	–
Anhydride phosphorique	traces	–	–	–	–
Anhydride carbonique	45,00	43,65	44,15	43,90	42,60
	99,89	99,96	99,93	99,89	99,84
CO^3Ca	75,60	95,80	88,20	96,15	61,70
CO^3Mg	22,42	2,86	10,20	3,02	10,20
CO^3Mn	–	–	–	–	26,41
	98,02	98,66	98,40	99,17	98,31

En dehors de ces constituants on observe très peu de minéraux étrangers. Nous avons caractérisé des inclusions très disséminées de micas divers (biotite, phlogopite, muscovite) et de feldspaths.

PÉTROGRAPHIE. — *De la teneur du titane dans les bauxites.* Note de M. **Jacques de Lapparent**, présentée par M. Pierre Termier.

J'ai montré naguère (¹) que la teneur relativement forte en titane des bauxites de la France méridionale (de 3 à 6 pour 100 de TiO^2) s'explique très bien par les cristaux de rutile et d'anatase qui forment, pour la plus grande part, la *poussière* de minéraux de haute réfringence qui charge la masse de ces roches.

La question se pose de savoir quel est le lieu de formation des minéraux titanifères de cette poussière.

En bien des cas, par le passage qu'on peut saisir de poussières fines à des

(¹) *La texture des bauxites et leur origine* (*Comptes rendus*, 185, 1927, p. 213).

poussières plus grossières mettant en évidence le caractère classique de leurs matériaux, on se convainc de l'origine détritique des minéraux de titane. Incorporés primitivement aux sédiments calcaires dont proviennent, par décalcification, les bauxites méditerranéennes, ils sont un résidu des argiles de décalcification qui n'a pas évolué lors de la constitution même de la bauxite.

Mais s'il en est ainsi fréquemment, on peut voir cependant que parfois les acides titaniques cristallisés sont de néoformation et datent du temps d'élaboration de la bauxite.

Effectivement, on observe très bien en certains types de bauxites dont les hydrates d'alumine ont largement cristallisé que l'importance des cristaux des acides titaniques est fonction de celle même des cristaux des hydrates d'alumine. Et tel est le cas d'une bauxite à diaspore du pays de Fenouillet (Pyrénées-Orientales) qui réunit des parties largement cristallines que caractérisent de beaux cristaux d'anatase à des parties plus finement cristallines chargées seulement de menus cristaux de cette espèce. Les minéraux d'où est sorti le titane qui s'est isolé dans la bauxite n'ont accompli leur évolution, dans le sens de la décomposition, qu'à l'époque où se formait, au lieu où ils se trouvaient, la bauxite même.

En dehors des bauxites méditerranéennes, certaines bauxites offrent une teneur en titane très élevée qui atteint couramment 8 pour 100 et se tient même parfois à la hauteur de 12 pour 100. C'est le cas des bauxites issues des coulées basaltiques du Deccan, dans l'Inde.

Là encore le microscope explique très bien la haute teneur en titane et montre que la source doit en être cherchée dans les fers titanés originellement contenus par les basaltes et libérés sur place. Ces fers titanés, *ilménite*, étaient primitivement associés, dans les basaltes, à la magnétite, par groupement épitaxique avec celle-ci suivant un mode bien connu des minéralogistes. La décomposition des basaltes marchant de pair avec leur déferrification a d'abord éliminé la magnétite; aussi voit-on, dans la bauxite, les lamelles d'ilménite, parallèles aux quatre directions des plans de l'octaèdre, former des sortes de grilles nettoyées de magnétite.

Ces lamelles d'ilménite sont parfois très minces et deviennent alors transparentes. Leur teinte va du brun au vert. Sans qu'il puisse être question d'analyser directement l'une d'entre elles, on est porté à croire que les plus claires, les vertes, sont essentiellement un produit qu'on peut représenter par la formule $FeO.TiO^2$, tandis que les brunes uniraient à ce

corps Fe^2O^3 (¹). On constate en outre que des prismes de rutile sont souvent appliqués, régulièrement groupés, sur ces lamelles mêmes, réalisant encore une épitaxie de type classique.

Mais la déferrification peut, en certaines places, atteindre le fer titané lui-même, et dont les lamelles se trouvent alors remplacées par une grenaille de cristaux d'anatase. Ces cristaux d'anatase, dont la dimension est de l'ordre du millième de millimètre, associés à des prismes de rutile venant de la désagrégation des cristaux d'ilménite et à de très petites lamelles d'ilménite restées intactes, forment la *poussière* abondamment répandue au sein de la gibbsite ($Al^2O^3 . 3H^2O$), matière principale des bauxites de l'Inde.

Quelle que soit la richesse en titane des bauxites il semble que ce corps compose toujours, dans ces roches, des minéraux anhydres : rutile, anatase, ilménite.

HYDROGÉOLOGIE. — *Les* marcas *du haut plateau d'Artois.* Note de M. **L. Dollé**, présentée par M. L. Cayeux.

La prospection méthodique du plateau qui porte les villages de Beaumetz-les-Aires, Laires, Livossart, Prédefin, Fontaine-les-Boulans, Fiefs, et qui est limité à l'Ouest par la vallée de la Lys, révèle des faits curieux et nouveaux.

Le sol, à l'altitude moyenne + 180, est tourmenté, creusé de multiples dépressions fermées, d'entonnoirs réguliers, de dimensions variables, les plus petits mesurent 3 à 5^m de diamètre, les plus grands, 20 à 150^m.

Dépressions et entonnoirs sont tantôt isolés, tantôt juxtaposés et se rencontrent aussi bien en plein champ qu'au milieu d'habitations.

Leur profondeur varie de 1 à 5 et 8^m et souvent le fond de la dépression est marqué par un buisson, une zone inculte et broussailleuse.

Les habitants de Laires et de Beaumetz-les-Aires redoutent la formation des *marcas*; les murs des habitations se crevassent, y descendent, les chemins s'effondrent au passage de véhicules lourdement chargés; les eaux de surface et de ruissellement disparaissent dans ces cavités, y entraînent l'eau

(¹) Peut-être une petite partie de ces lamelles serait-elle magnésienne, comme le laisserait supposer l'analyse de certaines des bauxites de l'Inde, formant de la picrotitanite ou même de la geikilite. Les lamelles minces agissent sur la lumière polarisée dans les sections transversales. On en déduit que l'ilménite est uniaxe négative.

des fossés, les purins, les eaux résiduaires des habitations ; aussi les puits de ces agglomérations sont-ils constamment pollués.

Le sol est formé de limons épais de 3 à 5^m reposant sur les marnes grises du Turonien moyen ; les puits, profonds de 60^m, pénètrent dans les marnes du Turonien inférieur et du Cénomanien. Le socle paléozoïque, visible à 3^km à l'Ouest, à Matringhem, doit se trouver, sous Beaumetz-les-Aires et Laïres, à l'altitude approximative + 115.

Les marcas (bétoires), fréquents dans les régions de calcaires jurassiques et considérés jusqu'ici comme rares dans les régions crétacées, se multiplient depuis quelques années (vallée de l'Escaut, région de Cambrai, Artois) et leur étude suscite des observations nouvelles, d'ordre pratique et scientifique.

Les marnes turoniennes et cénomaniennes du nord de la France, riches en silicate d'alumine, sont classées comme sédiments imperméables et plastiques. Elles préservent les exploitations houillères de l'envahissement par les eaux souterraines des assises surincombantes et, grâce à leur plasticité, épousent les déformations que les travaux miniers impriment à la surface topographique du terrain houiller. L'étanchéité qu'elles assurent n'est pas compromise par ces mouvements de subsidence.

Les mêmes marnes, à 10^km du bassin houiller, sous le plateau d'Artois, devraient présenter les mêmes caractères d'imperméabilité. Au contraire elles accusent les propriétés des sédiments calcaires, sont crevassées, et laissent percoler sur toute leur épaisseur les eaux de surface, qui délitent les marnes, dissolvent le calcaire, créent des cavités souterraines importantes où disparaissent limons de surface, chemins, cultures, voire même les habitations. Le réseau de fractures est rendu manifeste par le manque d'uniformité des profondeurs des puits, qui, à Beaumetz-les-Aires et Laires, ont des profondeurs variant de 5 à 60 mètres.

Le nombre considérable d'entonnoirs et de dépressions fermées alignés suivant la direction Nord-Ouest, Sud-Est, sur plus de 12^km, rend compte de l'importance de ce réseau de fractures, et des dissolutions souterraines qui s'y produisent.

Les sources de la vallée de la Lys et de la région d'Heuchin à 4 et 6^km au Sud-Ouest, donnent des eaux troubles, laiteuses, presque toujours contaminées, de débit très variable ; elles ont le caractère des résurgences.

L'état de fissuration de ces marnes appelle d'autres observations.

Le socle paléozoïque, dans la région de Matringhem, Vincly, est formé

de grès dévoniens blancs et roses avec intercalations de bancs schisteux rouges; l'ensemble accuse un pendage rapide vers le Sud-Ouest.

Si le socle paléozoïque était affecté, dans cette région par un mouvement négatif, il se traduirait en surface par l'inondation partielle de la vallée; les marnes plastiques, épaisses de 60 à 70^{m}, qui recouvrent le primaire épouseraient son mouvement et les fractures seraient rapidement colmatées.

Au contraire les fractures sont largement ouvertes et absorbent toutes les eaux de surface, ce qui pourrait laisser croire que le socle paléozoïque de Matringhem-Vincly (axe d'Artois) est affecté d'un mouvement positif, provoquant une fracturation continue des sédiments crétacés surincombants, suivant l'alignement des grès et schistes primaires, et déclenchant tous ces phénomènes hydrogéologiques de surface et de profondeur.

BOTANIQUE. — *Homo- et hétérothallisme chez les Levures*. Note de M. A. **Guilliermond**, présentée par M. Molliard.

Au moment où nous avons démontré l'existence d'une sexualité chez les Levures, la notion d'hétérothallisme n'était pas encore établie et notre attention ne fut pas attirée de ce côté. Il y avait là une lacune qu'il était nécessaire de combler.

Rappelons qu'au point de vue de la sexualité les Levures se rattachent à deux types : chez les unes (*Schizosaccharomyces*, *Zygosaccharomyces*, *Debaryomyces*, etc.), l'asque dérive d'une conjugaison iso- ou hétérogamique, en sorte que la méiose se produisant vraisemblablement dans l'asque, la diplophase est réduite à la zygospore. Dans les autres (*Saccharomycodes* et certains *Saccharomyces*) la conjugaison se produit entre les ascospores lors de leur germination et la diplophase occupe, au contraire, presque tout le développement.

Les Levures de cette seconde catégorie sont nécessairement hétérothalliques et nos recherches ont établi que la conjugaison s'opère entre les deux paires d'ascospores d'un même asque, ce qui prouve que chaque asque contient 2 ascospores + et 2 ascospores —.

Nos recherches présentes ont porté sur les Levures de la première catégorie, en particulier sur le *Schizosaccharomyces Octosporus* pour lequel il subsistait quelques obscurités. Nos anciennes observations avaient montré que la conjugaison peut s'effectuer dans cette Levure entre deux cellules-

filles issues du cloisonnement d'une même cellule, ce qui indiquait l'homothallisme.

Cependant nous avions constaté d'autre part que les ascospores, après gonflement, peuvent se conjuguer directement sans cloisonnement préalable, pour former de nouveaux asques dans l'intérieur même de l'ancien, fait en faveur de l'hétérothallisme. Il y avait donc lieu de reprendre d'une manière plus précise l'étude de cette Levure. Pour cela nous avons réalisé des cultures monospermes soit à l'aide du microdissecteur, soit au moyen de dilutions sur plaque de gélatine : celles-ci nous ont toujours donné des conjugaisons et des asques. Nous avons contrôlé ces résultats en isolant sur gouttelette pendante une seule ascopore et en suivant son développement sous le microscope. En procédant de la sorte sur moût de bière gélosé, on constate que l'ascospore se cloisonne un plus ou moins grand nombre de fois, puis que les cellules résultant de ce cloisonnement se conjuguent pour former des asques. Sur milieux défavorables à la croissance (gélose de gorodkowa) les ascospores peuvent ne subir qu'un seul cloisonnement et la conjugaison se produit alors entre les deux cellules-filles issues de celui-ci. Ces faits confirment donc nos premières observations et démontrent que le *Sch. Octosporus* est une espèce homothallique : les ascospores sont bisexuées, mais la ségrégation des sexes qui n'est pas en rapport avec la méiose peut s'effectuer dès le premier cloisonnement de l'ascospore. Dès lors il y a lieu de se demander si cette ségrégation s'opère régulièrement au cours du premier cloisonnement des ascospores, donnant des cellules + et — qui, selon les conditions du milieu, peuvent se conjuguer directement ou seulement après un plus ou moins grand nombre de cloisonnements, ou bien si la ségrégation précède immédiatement la conjugaison. Cette seconde éventualité est démontrée par le fait que nous avons suivi sous le microscope des conjugaisons se produisant entre deux cellules-filles provenant du cloisonnement d'une cellule végétative dérivée elle-même de plusieurs partages successifs d'une seule ascospore. D'autre part la Levure cultivée sur moût liquide forme de petits filaments cloisonnés et ramifiés : ceux-ci, transportés sur blocs de plâtre, donnent des conjugaisons entre cellules contiguës d'un même filament.

Ces faits se concilient difficilement avec la conjugaison directe des ascospores que nous avions décrite dans certaines conditions et il était nécessaire de la vérifier. Dans ce but nous avons isolé des asques sur gélose de *Gorodkowa* et nous avons suivi sous le microscope la germination de leurs ascospores. Celles-ci ne subissent généralement qu'un seul cloisonnement qui s'effectue le plus souvent dans l'intérieur de l'asque et la conjugaison a

lieu entre les deux cellules-filles provenant de ce cloisonnement, donnant des asques qui se développent avant la rupture de la paroi de l'ancien asque. Mais dans quelques cas, nous avons pu observer des ascospores qui, après s'être gonflées et sans cloisonnement préalable, se conjuguaient directement dans l'asque et y formaient de nouveaux asques. Ce phénomène se produit aussi bien dans les asques à 4 ascospores que dans ceux qui en ont 8. On peut d'ailleurs obtenir plus facilement ces conjugaisons d'ascospores en plaçant des asques dans du moût de bière jusqu'à gonflement de leurs ascospores, puis en les soumettant à l'inanition sur bloc de plâtre. Les ascospores ont une paroi imprégnée d'amyloïdes colorables en bleu par l'iode et qui disparaissent lors de leur premier cloisonnement : il y a là un moyen de distinguer dans l'asque les ascospores des cellules provenant de leur partage. Cette conjugaison des ascopores paraît en contradiction avec l'homathallisme bien établi du *Sch. Octosporus*. On pourrait l'expliquer en supposant que cet homothallisme n'est pas général et qu'à côté de nombreuses ascospores bisexuées, il s'en formerait quelques-unes de sexuées; il est plus vraisemblable d'admettre que la ségrégation des sexes dans cette Levure homothallique n'est pas nécessairement liée à un cloisonnement, mais sous la dépendance exclusive des conditions du milieu et peut s'opérer pendant le gonflement des ascospores.

Des observations poursuivies en même temps sur un *Zygosaccharomyces* (*Zygosaccharomycodes Japonicus*), que nous appelons *Z. Nishiwakii*, nous ont montré que cette Levure est aussi homothallique, mais chez elle, la ségrégation des sexes beaucoup plus tardive ne s'opère qu'après un bourgeonnement actif. L'homothallisme est d'ailleurs démontré par nos recherches antérieures pour les espèces hétérogames des genres *Zygosaccharomyces* et *Debaryomyces* et par celles de Nadson et Konokotine pour le genre *Nadsonia*.

BOTANIQUE. — *Caractères histologiques de racines développées isolément.* Note de M. **André Dauphiné**, présentée par M. Molliard.

On sait que des organes embryonnaires, isolés des autres parties de l'embryon et cultivés aseptiquement sur des milieux appropriés, peuvent s'accroître, au moins pendant un certain temps.

Des radicules de Lupin blanc ont été cultivées sur du Knop à 1/5, addi-

tionné de 2 pour 100 de glucose. La durée maxima des cultures a été de 40 jours; au bout de ce temps, les racines, qui mesuraient à l'état embryonnaire, 2^{mm} de diamètre maximum et $2^{mm},5$ de longueur, avaient atteint un diamètre de 4^{mm} et une longueur de 14 à 25^{mm}.

L'étude anatomique de ces racines montre que le déséquilibre qui résulte de l'absence des parties aériennes de la plante ne semble avoir, dans la limite de ces expériences, aucune influence sur la structure fondamentale de la racine, c'est-à-dire sur la topographie des principales régions et sur l'évolution de l'appareil conducteur.

Au contraire, si l'on considère les tissus en eux-mêmes, on y constate des modifications qui peuvent devenir considérables. Elles sont peu apparentes, au début de la croissance, dans la partie de la racine dont les tissus étaient formés quoique non différenciés dans la radicule embryonnaire. Pendant les premiers jours il se produit surtout un accroissement et une différenciation des éléments grâce à la digestion des matières de réserve, c'est-à-dire dans des conditions voisines de celles de la germination normale.

A la fin de l'expérience, les modifications histologiques sont devenues sensibles dans la base de la racine et se manifestent avec le maximum d'intensité dans la partie qui s'est formée depuis la mise en culture par le fonctionnement du point végétatif.

L'assise pilifère ne présente qu'un petit nombre de poils courts et parfois globuleux. Les éléments extérieurs du conjonctif cortical restent très petits; ils ne présentent qu'une dizaine de μ de diamètre en moyenne; ils restent cellulosiques, et se dissocient sur plusieurs assises à partir de la périphérie de la racine.

Les éléments profonds de l'écorce présentent, au contraire, un développement considérable, surtout suivant leur diamètre radial : ce diamètre peut atteindre une moyenne de 150^{μ}, sur une hauteur de 65^{μ}, alors que les mêmes cellules des racines témoins mesurent 85^{μ} de diamètre sur 95^{μ} de hauteur. Des éléments de taille intermédiaire peuvent séparer ces deux zones de l'écorce, mais il arrive, surtout dans les parties de la racine les plus nouvellement formées, que l'on passe sans transition des cellules profondes géantes aux petites cellules de la périphérie.

L'hypertrophie des éléments profonds a pour résultat de faire éclater les assises externes de l'écorce et de produire des crevasses longitudinales à section transversale triangulaire, le sommet du triangle étant tourné vers le centre de la racine.

De même que les éléments profonds de l'écorce, le péricycle s'est considérablement accru dans le sens radial. Alors que, dans les racines normales, il est unisérié avec une épaisseur moyenne de 32^{μ}, chez les racines isolées les éléments sont recloisonnés dans le sens tangentiel et parfois dans des directions radiales et obliques et son épaisseur peut atteindre une centaine de μ.

Les autres éléments conjonctifs du cylindre central sont de dimensions variables et de formes irrégulières : ils semblent avoir une tendance à s'individualiser au cours de leur accroissement, leur cohésion semble très réduite et certains d'entre eux s'allongent en tubes qui s'insinuent entre les éléments voisins. Les fibres qui se forment dans la partie externe du phloème s'allongent considérablement comme des hyphes insinuées entre les cellules et certaines d'entre elles présentent des bourgeons latéraux comme si, avant de se sclérifier, elles avaient subi un commencement de ramification.

Les tubes criblés ne présentent pas de modifications appréciables, de même que les vaisseaux primaires dont le calibre est simplement plus réduit que dans les racines normales.

Le xylème secondaire qui, normalement, comprend des vaisseaux et des éléments réticulés de petit calibre, comporte presque uniquement ces derniers dans les racines isolées où ils peuvent être entremêlés d'éléments cellulosiques. Ce xylème secondaire rappelle celui de certains organes tubérisés.

En résumé, la structure des racines de Lupin cultivées isolément montre que les conditions anormales de leur développement n'ont pas d'influence sur les caractères fondamentaux, topographie des régions et évolution de l'appareil conducteur : ce sont là, semble-t-il, des caractères acquis et profondément fixés par l'hérédité dès la formation de la radicule embryonnaire. Au contraire les conditions de vie de ces racines provoquent des réactions dans les tissus considérés en eux-mêmes, principalement dans les tissus conjonctifs situés au voisinage de l'appareil conducteur, en particulier du phloème. Les hypertrophies et les désordres cellulaires qui s'y manifestent semblent indiquer que l'absence des parties aériennes de la plante, obligeant la racine à utiliser sur place l'aliment qui lui est fourni par le milieu de culture, provoque une exagération et une individualisation de la vie cellulaire opposées à l'harmonie structurale de l'individu normal.

PHYSIOLOGIE. — *Un hémodromographe électrique.*
Note de M. **Philippe Fabre**, présentée par M. d'Arsonval.

Une étude complète du régime ondulatoire dans les artères ou les tubes élastiques des schémas circulatoires exige à la fois un enregistrement de pression et un enregistrement de vitesse du liquide comme nous l'avons montré ([1]).

L'hémodromographe de Chauveau était utilisé jusqu'ici à cette fin. Cet appareil se prête mal à des enregistrements à distance; aussi avons-nous songé à établir un dispositif électrique, non point seulement pour la transmission, mais pour la génération même d'un phénomène lié aux variations de vitesse du liquide. Voici le principe de notre méthode.

Le liquide balaie une lame métallique à palette terminale et tend en raison de sa vitesse à l'appliquer contre la paroi. Les variations de vitesse seront traduites par des variations d'écart entre palette et paroi.

Un courant électrique très faible et d'intensité constante (quelques dizaines de microampères) traverse le liquide entre la face supérieure de la palette et l'extrémité d'une vis émergeant de la paroi en regard.

Aux variations d'écart entre ces deux électrodes correspondent des variations de résistance électrique du milieu, c'est-à-dire des variations de chute ohmique entre les bornes A et B.

La différence de potentiel entre A et B est recueillie et considérablement amplifiée par un appareil à lampes.

Nous nous servons de celui qui nous a permis d'inscrire les oscillations électriques du cœur à l'aide d'oscillographes industriels ([2]).

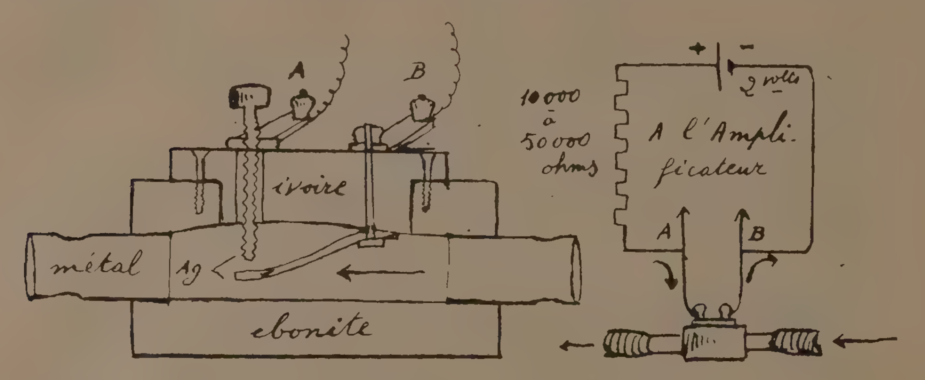
Ainsi les variations de vitesse du liquide, même très rapides, peuvent être correctement suivies à distance et enregistrées grâce à l'oscillographe.

L'appareil doit être étalonné. Pour cela on réalise des courants continus de vitesses variées avec le liquide même en expérience ou avec un liquide de même densité et de même conductibilité électrique. L'arrêt brusque du courant donne la déviation oscillographique qui correspond à la vitesse actuelle.

([1]) Ph. Fabre, *La mécanique des phénomènes sphygmomanométriques*, 1925 (Doin, éditeur, Paris).

([2]) Ph. Fabre, *Électrocardiographie ou moyen d'oscillographes industriels* (*Comptes rendus*, **187**, 1928, p. 257).

Donnons quelques détails de construction. Les électrodes (vis et lame élastique) sont portées par un bloc d'ivoire qui obture une fenêtre (16^{mm} de long sur 4^{mm},5 de large) pratiquée dans la paroi supérieure d'un tube d'ébonite parcouru par le courant. Deux ajutages métalliques (2^{mm},5 de diamètre



intérieur) permettent de rattacher ce tube aux bouts sectionnés d'une artère de chien ou à un schéma de circulation.

La paroi interne du bloc d'ivoire est sculptée en sorte que les obstacles qu'elle porte soient compensés par un élargissement léger de la section.

La lame élastique et la palette qui la termine sont revêtues d'un vernis isolant sauf à la face de cette dernière en regard de la paroi. L'extrémité de la vis qui forme la seconde électrode peut être plus ou moins rapprochée de la palette grâce au filetage d'une pièce métallique solidaire du bloc d'ivoire. Pour chaque régime de vitesse à étudier il existe un optimum d'enfoncement de la vis. Les pièces métalliques sont en argent, que l'on chlorure électrolytiquement sur leurs surfaces internes.

Le nettoyage de l'instrument est facile car la fenêtre latérale peut être ouverte par le jeu de deux vis de fixation.

La méthode actuelle nous paraît susceptible d'être appliquée aussi à l'inscription des pressions avec le minimum de perturbations dues à l'inertie des instruments de mesure. Vis et palette sont cette fois à l'extérieur du tube, mais toujours baignées d'un liquide conducteur. La palette suit l'expansion d'une paroi élastique qui obture une fenêtre évasée, pratiquée sur le tube.

Un sphygmographe sensible, pour inscription à distance, peut être construit aussi suivant le même principe.

Le fonctionnement de l'hémodromographe s'est révélé satisfaisant même lorsqu'on utilise de l'eau de la ville. Avec le sang les précautions usuelles pour éviter la coagulation doivent être prises.

CYTOLOGIE. — *Sur la disposition des constituants minéraux du noyau pendant la mitose.* Note de M. **Gordon H. Scott**, présentée par M. F. Mesnil.

On a noté (¹) que les matières minérales fixes du noyau, après micro-incinération par la méthode de Policard, s'observent topographiquement à la même place que le matériel chromatique. Ceci se constate dans les cellules normales ou pathologiques de la glande sous-maxillaire du cobaye.

Il était intéressant de déterminer l'évolution des sels minéraux fixes pendant la mitose. La peau du têtard de Grenouille a été choisie comme objet d'étude en raison des dimensions de ses cellules et de la facilité d'obtenir des lames minces sans faire intervenir la méthode habituelle des coupes.

Pour augmenter le nombre des mitoses, de petites plaies de la peau ont été faites dans quelques cas. La peau a été préparée pour l'examen de plusieurs façons. Des fragments de peau furent enlevés du bord transparent de la queue, étalés sur lames, et soit desséchés, soit fixés à l'alcool absolu. Dans la plupart des cas, l'animal était préalablement lavé à plusieurs reprises dans de l'eau distillée renouvelée, et, après cela, placé dans le fixateur. Après une fixation de 15 à 20 minutes, la peau était enlevée des divers points du corps et de la queue, et fixée à des lames par dessiccation. Quelques animaux furent coupés dans la paraffine suivant la méthode habituelle; des coupes successives furent alternativement incinérées ou colorées par l'hématéine-éosine, ces dernières préparations servant de comparaison.

La pigmentation accentuée obscurcit quelque peu les détails cytologiques de la peau dans les préparations fixées et colorées. Mais avec un fort éclairage, les figures de mitoses peuvent être décelées. Le pigment disparaît complètement après incinération.

(¹) G. H. Scott, *Sur la localisation des constituants minéraux dans les noyaux cellulaires des acini et des conduits excréteurs des glandes salivaires* (*Comptes rendus*, **190**, 1930, p. 1073).

L'aspect des cellules au repos est celui d'un champ bien limité de cendres très fines uniformément dispersées, mais avec, occasionnellement, une masse bacilliforme relativement grande. Le nucléole apparaît avec une grande netteté. La comparaison avec des noyaux colorés montre que celui-ci contient de la chromatine régulièrement distribuée avec des régions un peu plus intensément colorées.

Pendant la prophase, on constate beaucoup plus de ces amas bacilliformes plus allongés et plus épais. Dans le reste du noyau, on voit un dépôt de très fines particules poussiéreuses. Il y a, dans quelques-unes des cellules à ces stades, une tendance à l'orientation des masses de cendres vers une forme spirale.

Il a été impossible d'obtenir des cellules au stade de métaphase qui soient complètement incinérées. Quelle que soit la durée du chauffage, il reste toujours un dépôt de charbon sur les masses de chromosomes. Quoiqu'il soit facile de reconnaître les cellules en métaphase dans la peau incinérée, il est impossible de dire jusqu'à présent quelle est exactement la disposition des matières minérales à ce stade en raison de l'incinération toujours incomplète. Aucune explication ne peut actuellement être donnée de ce singulier phénomène.

Le stade anaphase de la division a été observé dans plusieurs cas. Dans l'un d'eux, la forme individuelle des divers chromosomes était parfaitement conservée. La limite du noyau pouvait être reconnue parce que dessinée très légèrement par des cendres extrêmement fines. Un champ de cendres fines pouvait être discerné au pôle périphérique de la masse de chromosomes.

La télophase est caractérisée par une grande masse de cendres relativement denses réunies au centre de la cellule. Il est difficile de définir une organisation dans cette masse. Quelques fines granulations se trouvent dans le cytoplasme de la cellule, spécialement entre les deux champs nucléaires. Si une organisation existe dans le dépôt, elle est indiquée par une tendance des cendres à prendre la figure de filaments très fins.

Il est évident que, au cours de la mitose, les matières minérales fixes du noyau, que nous pensons être contenues dans le matériel chromatique, suivent les chromosomes pendant leur changement de forme. Il y a dans quelques stades, prophase et anaphase, une dispersion très légère des sels fixes sous la forme de dépôt fin entre les chromosomes.

CHIMIE PHYSIOLOGIQUE. — *La teneur en acide citrique de quelques liquides animaux* (*liquide céphalo-rachidien*, *humeur aqueuse*, *liquide folliculaire*, *liquide amniotique*). Note [1] de MM. **I.-I. Nitzescu** et **I.-D. Georgescu**, présentée par M. E.-L. Bouvier.

En étudiant un grand nombre de semences des plantes, Thunberg a trouvé dans les semences de concombre (*Cucumis sativus*) une série de déshydrogénases parmi lesquelles on distingue surtout, à cause de sa haute sensibilité, une citricodéshydrogénase. Celle-ci est tellement active qu'un extrait de semences de concombre peut, dans le système bleu de méthylène-déshydrogénase, déterminer une accélération très accusée de la décoloration en présence de quantités infimes d'acide citrique. On peut déceler ainsi la présence dans les tissus et les liquides des quantités infiniment petites d'acide citrique, indécelables par les autres méthodes.

Employant cette décoloration enzymatique du bleu de méthylène par l'extrait (en solution de 0,87 pour 100 de PO^4HK^2) de semences de concombre, Thunberg a proposé récemment [2] une méthode, d'une extrême sensibilité, pour la mise en évidence et le dosage de l'acide citrique dans les milieux organiques. En effet, pour connaître quantitativement le contenu en acide citrique d'un liquide quelconque, il suffit de déterminer la quantité minime, juste nécessaire, qui doit être ajoutée au système bleu de méthylène-extrait de concombre, pour produire la décoloration dans le plus court délai. Thunberg a trouvé ainsi qu'il suffit d'une quantité de 8 γ (microgrammes $= 0^{mg},008$) acide citrique dans un volume réduit (1 à $1^{cm^3},2$) pour produire la décoloration du bleu de méthylène (0^{cm^3} sol. 1/30000) avec le maximum de vitesse (7-9 minutes); une quantité immédiatement moindre augmente brusquement le délai de décoloration.

Thunberg et ses collaborateurs ont mis en évidence et ont dosé l'acide citrique dans le lait de femme et l'urine [3]; dans le liquide céphalo-rachidien de l'homme, le liquide des vésicules séminales, le liquide spermatique de l'homme et la sueur [4].

Employant cette méthode biologique, nous avons mis en évidence et

---

(1) Séance du 26 mai 1930.

(2) *Bioch. Zeit.*, **206**, 1929, p. 109.

(3) *Loc. cit.*

(4) *Amer. Journ. Physiol.*, **90**, 1929, p. 540 (*Congrès Intern. de Physiol.*, Boston).

dosé l'acide citrique dans le liquide folliculaire de l'ovaire de vache, le liquide amniotique de femme, l'humeur aqueuse de l'œil de bœuf et le liquide céphalo-rachidien de l'homme et du chien.

Résultats. — *a.* Tout d'abord, pour contrôler quelques-uns des résultats de Thunberg, nous avons déterminé l'acide citrique dans le lait de femme et dans le liquide céphalo-rachidien de l'homme. Les chiffres obtenus pour le lait sont analogues à ceux de Thunberg.

En ce qui concerne le liquide céphalo-rachidien de l'homme, nous avons trouvé des chiffres un peu plus forts, $0^g,075$ à $0^g,080$ pour 100 au lieu de $0^g,050$ à 0,060 donnés par Benni-Thunberg.

Nous donnons, à titre d'exemple, dans le tableau ci-dessous la marche d'une de plusieurs expériences semblables :

Tubes	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
Bleu de méthylène 1/30000 (cm^3)	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3
Liquide céphalo-rach. $0^{cm^3},2$	-	A	B	C	D	-	A	B
Extrait phosphaté de semences (cm^3)	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	-	-
Eau distillée (cm^3)	0,2	-	-	-	-	0,2		
Solution de PO^4HK^2	-	-	-	-	-	-	0,5	0,5
Temps de décoloration en minutes	100	7	7	21	52	100	>180	>180

A = liquide céphalo-rachidien non dilué; B = liquide dilué 1:2; C = liquide dilué 1:4; D = liquide dilué 1:8.

Le tableau montre que le maximum de la vitesse de décoloration a été obtenu dans le tube 4; il doit donc y avoir 8 microgrammes d'acide citrique. Le tube contient $0^{cm^3},2$ de liquide dilué 1:2; par conséquent 1^{cm^3} de liquide céphalo-rachidien non dilué doit contenir $8 \times 5 \times 2\gamma$ d'acide citrique, c'est-à-dire une concentration de $0^g,080$ par litre.

D'autres expériences faites avec d'autres échantillons de liquide nous ont donné les mêmes chiffres ou des chiffres très voisins.

b. Avec le liquide céphalo-rachidien du chien, nous avons obtenu une quantité plus grande d'acide citrique, environ $0^g,090$ à $0^g,100$ par litre.

c. L'humeur aqueuse a été obtenue par ponction stérile de la chambre antérieure des yeux des animaux d'abattoir (bœufs).

Les premiers essais nous ont montré que l'humeur aqueuse non diluée exerce une accélération de la décoloration dans le système citricodéshydrogénase-bleu de méthylène, mais la vitesse ne descend pas au-dessous de 25 ou 23 minutes. Ainsi, si la présence d'acide citrique ne faisait aucun

doute, on ne pouvait cependant pas doser, à cause de la quantité trop petite contenue dans $0^{cm^3},2$ ou $0^{cm^3},4$ d'humeur recueillie dans les tubes. La difficulté a été tournée par la concentration préalable de l'humeur aqueuse, c'est-à-dire par l'opération inverse de celle usitée pour les liquides (lait, urine, etc.), qui contiennent une quantité accusée d'acide citrique. Nous avons ainsi décelé une concentration d'environ $0^g,012$ d'acide citrique par litre d'humeur aqueuse.

Nous avons eu la chance d'examiner aussi le liquide ponctionné dans un cas d'hypertension oculaire. Nous avons trouvé une quantité presque triplée, environ $0^g,040$ d'acide citrique pour 1000.

d. Le liquide folliculaire a été obtenu par ponction des follicules de petites dimensions sur des ovaires de vaches. Nous avons travaillé avec le liquide sans dilution et nous avons trouvé environ $0^g,040$ d'acide citrique par litre de liquide folliculaire.

e. Le liquide amniotique a été récolté dans la salle d'accouchement de la clinique obstétricale. Le maximum de la vitesse de décoloration (9 minutes) dans le système bleu de méthylène-citricodeshydrogénase a été obtenu avec le liquide sans dilution. La concentration que nous avons trouvée dans quatre échantillons de liquide a été de $0^g,025$-$0^g,027$ d'acide citrique par litre de liquide amniotique.

f. Dans quelques essais faits avec le sérum sanguin de l'homme nous avons trouvé, comme Osterberg-Thunberg, des traces non dosables.

A 16^h15^m l'Académie se forme en Comité secret.

COMITÉ SECRET.

M. le **Président**, au nom de la Commission chargée de dresser une liste de candidats à la place vacante dans la Division des Applications de la science à l'industrie par le décès de M. *A. Rateau*, présente la liste suivante :

En première ligne.	M. **Jean Rey**.
En deuxième ligne, ex æquo par ordre alphabétique	MM. **Paul Boucherot**, **Albert Caquot**.
En troisième ligne, ex æquo par ordre alphabétique.	MM. **Louis Breguet**, **Émile Brylinski**, **Albert Portevin**.

Les titres de ces candidats sont discutés.

L'élection aura lieu en la séance du lundi 16 juin.

La séance est levée à 17^h30^m.

E. P.